

Capitolo 1

GEOMETRIA AFFINE

1.1 Spazi affini

Lo *spazio affine* è l'ambiente geometrico corrispondente allo *spazio vettoriale* in Algebra lineare.

Definizione 1.1.1 (Assiomi di spazio affine). Se K è un campo e V un K -spazio vettoriale, si dice *spazio affine su V* un insieme non vuoto $\mathbb{A}$ (i cui elementi sono detti *punti*) assieme a una applicazione

$$\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V \quad \text{denotata con} \quad (P, Q) \mapsto Q - P := \phi(P, Q)$$

tali che

SA1. $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V \exists! Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$;

SA2. (Relazione di Chasles) $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ vale

$$(Q - P) + (R - Q) = (R - P).$$

In particolare, $\mathbb{A}$ si dice *spazio affine reale* se $K = \mathbb{R}$ oppure si dice *spazio affine complesso* se $K = \mathbb{C}$.

Immediate conseguenze della definizione sono i seguenti fatti.

Proposizione 1.1.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V allora

- i) $\forall P \in \mathbb{A}$ si ha che $P - P = 0_V$, vettore nullo di V ;
- ii) $\forall P, Q \in \mathbb{A}$ si ha che i vettori $Q - P$ e $P - Q$ sono opposti;
- iii) $\forall P \in \mathbb{A}$ l'applicazione indotta da ϕ

$$\phi_P : \mathbb{A} \longrightarrow V \quad \text{definita da} \quad Q \mapsto Q - P$$

è biiettiva.

Dimostrazione.

i) Applicando SA2 al caso $P = Q = R$ si ottiene l'uguaglianza tra vettori

$$(P - P) + (P - P) = (P - P)$$

da cui segue $P - P = 0_V$.

ii) Applicando il punto (i) e SA2 al caso $P = R$ si ottiene l'uguaglianza tra vettori

$$(Q - P) + (P - Q) = (P - P) = 0_V$$

e dunque la tesi.

iii) La suriettività e l'iniettività di ϕ_P seguono entrambe da SA1: rispettivamente, dall'esistenza e dall'unicità del punto Q . $\square$

I primi esempi di spazi affini sono il piano e lo spazio "ordinari". C'è anche un esempio naturale dato dalla struttura affine sull'insieme soggiacente a uno spazio vettoriale, come viene ora descritto.

Esempio 1.1.1. Siano V un K -spazio vettoriale, $\mathbb{A} := V$ e sia $\phi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow V$ definita da $\phi(P, Q) = Q - P$. In questo caso $Q - P$ non è una scrittura simbolica: è esattamente la differenza dei vettori $P, Q \in V$.

Si osservi che in questo caso i punti di $\mathbb{A}$ sono anche vettori di V e viceversa. Il nome e l'uso sono dati dal contesto. Questo appare chiaro verificando che valgono gli assiomi di spazio affine dati nella Definizione 1.1.1.

SA1. $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V \exists! Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$. Infatti basta prendere $Q := P + v$ (qui è la somma tra due elementi di V).

SA2. $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ vale

$$(Q - P) + (R - Q) = (R - P).$$

Basta infatti applicare le proprietà associativa e commutativa della somma nello spazio vettoriale V a cui appartengono $P, Q, R, (Q - P), \dots$.

Definizione 1.1.2. Lo spazio affine su V costruito nell'esempio precedente si dice *spazio affine naturale su V* e si denota con $\mathbb{A}(V)$.

Nel caso particolare in cui $V = K^n$, invece di $\mathbb{A}(K^n)$ scriveremo $\mathbb{A}_K^n$ (o semplicemente $\mathbb{A}^n$ se il campo è chiaro dal contesto) e tale spazio si dirà *spazio affine numerico su K* .

Esempio 1.1.2. Prendiamo i due punti $3, 7 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}$ sulla retta affine reale. La loro differenza come numeri reali coincide col vettore associato dalla struttura affine:

$$\phi(3, 7) = 7 - 3 = 4 \in V = \mathbb{R}.$$

Esempio 1.1.3. Prendiamo i punti $P = (1, -2)$ e $Q = (4, 0) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2$. Il vettore corrispondente è la loro differenza come coppie di numeri reali:

$$\phi(P, Q) = Q - P = (3, 2) \in V = \mathbb{R}^2.$$

In questi due esempi (e più in generale in $\mathbb{A}_K^n$) la struttura affine va intesa come una struttura aggiuntiva su $\mathbb{R}^n$ rispetto a quella di spazio vettoriale.

Definizione 1.1.3. Si dice *dimensione* di uno spazio affine $\mathbb{A}$ su V la dimensione dello spazio vettoriale V e si denota con $\dim(\mathbb{A})$.

In particolare, $\dim(\mathbb{A}_K^n) = n$. Se $K = \mathbb{R}$, diremo che $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ è il *piano affine reale*, che $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ è lo *spazio affine reale*, ecc. Se $K = \mathbb{C}$, con $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2, \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, \dots$ indicheremo rispettivamente il *piano affine complesso*, lo *spazio affine complesso* ecc.

I vettori di V danno luogo a “traslazioni” di uno spazio affine associato mediante una “somma” (tra oggetti non omogenei) che va precisata.

Osservazione 1.1.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V , comunque scelti un punto $P \in \mathbb{A}$ e un vettore $v \in V$, la scrittura

$$P + v$$

denota l'unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $v = Q - P$. (Tale punto esiste ed è unico per l'assioma SA1.) In particolare, è chiaro che

$$P + (Q - P) = Q.$$

Si osservi che la somma $P + v$ di cui sopra non è algebrica, ma simbolica. Tuttavia, se lo spazio affine è del tipo $\mathbb{A}(V)$, allora coincide col vettore somma dei vettori P e v e dunque è anche algebrica.

Proposizione 1.1.2. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V , l'applicazione

$$t : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad (P, v) \mapsto P + v$$

verifica le seguenti proprietà:

T1. $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v, w \in V$ vale $(P + v) + w = P + (v + w)$;

T2. $\forall P, Q \in \mathbb{A} \exists! v \in V$ tale che $Q = P + v$.

Inoltre, $P + 0_V = P$ per ogni $P \in \mathbb{A}$.

Dimostrazione.

T1) Per SA1, fissati P e v , esiste un unico punto Q tale che $v = Q - P$. D'altra parte, per la stessa ragione, esiste un unico punto R tale che $w = R - Q$. Pertanto

$$v + w = (Q - P) + (R - Q) = R - P,$$

dove la seconda uguaglianza segue da SA2. In conclusione si ha, utilizzando anche l'Osservazione 1.1.1,

$$(P + v) + w = Q + w = R = P + (R - P) = P + (v + w),$$

come volevamo.

T2) Per provare l'esistenza, basta osservare che $v := Q - P$ soddisfa il requisito, infatti $Q = P + (Q - P)$ per l'Osservazione 1.1.1. Per provare l'unicità, sia $w \in V$ tale che $Q = P + w$. Per SA1, esiste un unico punto $R \in \mathbb{A}$ tale che $w = R - P$. Allora $Q = P + w = P + (R - P) = R$ ancora per l'Osservazione 1.1.1. Pertanto $w = Q - P = v$.

Si osservi infine che per la Proposizione 1.1.1, per ogni $P \in \mathbb{A}$, vale $P - P = 0_V$. Pertanto $P + 0_V = P + (P - P) = P$, dove l'ultima uguaglianza segue dall'Osservazione 1.1.1. $\square$

Si vedrà in seguito che le proprietà T1 e T2 configurano t come un esempio di *azione* del gruppo additivo V sull'insieme $\mathbb{A}$.

Fissando il vettore v nel secondo fattore del dominio di t si ottiene una biiezione di $\mathbb{A}$ come segue.

Definizione 1.1.4. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $v \in V$, l'applicazione

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := P + v$$

si dice *traslazione di $\mathbb{A}$ lungo v* .

Si osservi che t_v è ben definita per l'Osservazione 1.1.1.

Esempio 1.1.4. Presi $P = (1, -2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ e $v = (6, 2) \in V = \mathbb{R}^2$ si ha

$$t_v(P) = P + v = (7, 0).$$

Esempio 1.1.5. Si osservi che $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ è una traslazione se e solo se

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

per un certo $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, e si ha $f = t_a$.

Per esempio, l'applicazione $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$

$$f(x, y, z) = \left(x - \sqrt{2}, y + 3i, z - 1 - \frac{3i}{4} \right)$$

è una traslazione dello spazio affine complesso $\mathbb{C}^3$.

Esercizio A1. Si provi che, per ogni $v, w \in V$, valgono i seguenti fatti:

- i) t_v è biiettiva;
- ii) l'applicazione inversa di t_v è t_{-v} ;
- iii) se v è il vettore nullo si ha $t_{0_V} = id(\mathbb{A})$;
- iv) $t_{v+w} = t_v \circ t_w = t_w \circ t_v$.

Abbiamo visto nella Proposizione 1.1.1-(iii) che ogni scelta di un punto di $\mathbb{A}$ induce una biiezione (non canonica) tra $\mathbb{A}$ e lo spazio vettoriale V . Questo motiva a dare la seguente nozione.

Definizione 1.1.5. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine sul K -spazio vettoriale V , diciamo *sistema di riferimento affine* su $\mathbb{A}$ il dato di un punto $O \in \mathbb{A}$ (detto *origine*) e una base $\mathcal{B}$ di V come spazio vettoriale. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, denoteremo il sistema di riferimento con $(O, \mathcal{B})$ o con $(O; e_1, \dots, e_n)$. In tal caso, per ogni $P \in \mathbb{A}$, il vettore $P - O$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base scelta:

$$P - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Le componenti $(x_1, \dots, x_n)$ di $P - O$ su tale base si dicono *coordinate* di P nel riferimento $(O; e_1, \dots, e_n)$ e si scriverà anche

$$P = (x_1, \dots, x_n).$$

Chiaramente le coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ di un punto sono un elemento di K^n , quindi il segno di uguaglianza nella scrittura “ $P = (x_1, \dots, x_n)$ ” è un abuso di notazione, in quanto (in generale) un punto di $\mathbb{A}$ non *coincide* con le sue coordinate.

Osservazione 1.1.2. Fissato un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ nello spazio affine $\mathbb{A}$, comunque scelti due punti $A, B \in \mathbb{A}$ di coordinate, rispettivamente, $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$, il vettore $B - A$ ha componenti, rispetto a $\mathcal{B}$, date da

$$B - A = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n).$$

Infatti $B - A = (B - O) + (O - A)$ per SA2. D'altra parte, $B - O = (b_1, \dots, b_n)$ e $O - A = -(A - O) = -(a_1, \dots, a_n)$. Le regole della somma in K^n conducono alla tesi.

Questo motiva la scelta del simbolismo “ $B - A$ ” anche se non ha, in generale, un significato algebrico.

Definizione 1.1.6. Nello spazio affine $\mathbb{A}_K^n$ si dice *sistema di riferimento affine standard* quello in cui l'origine è $O = (0, \dots, 0) \in K^n$ e la base $\mathcal{B}$ è quella canonica di K^n .

1.2 Sottospazi affini e loro intersezioni

Introduciamo la nozione di “sottostruttura” della struttura geometrica di spazio affine.

Definizione 1.2.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Se $P \in \mathbb{A}$ e W è un sottospazio vettoriale di V , diciamo *sottospazio affine passante per P di giacitura W* l'insieme

$$P + W := \{P + w \mid w \in W\}$$

Osserviamo che il punto P appartiene al sottospazio affine $P + W$ in quanto $P = P + 0_V \in P + W$ poiché $0_V \in W$.

Inoltre ogni punto $P \in \mathbb{A}$ è esso stesso un sottospazio affine, in quanto $P = P + (0_V)$, dove (0_V) indica il sottospazio vettoriale nullo di V .

Esempio 1.2.1. Siano dati il punto $Q = (1, -1, 2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ e il sottospazio vettoriale $W = \langle e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$, dove (e_1, e_2, e_3) denota la base canonica di $\mathbb{R}^3$. I generatori di W sono linearmente indipendenti (4), quindi $\dim W = 2$. Il sottospazio affine $Q + W \subset \mathbb{A}^3$ è formato da tutti e soli i punti della forma

$$P = (1 + x, -1 + x + y, 2 + 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Infatti, $P \in Q + W \iff P = Q + w$, per un certo $w \in W$. Ma

$$w = x(e_1 + e_2) + y(e_2 + 2e_3)$$

per certi $x, y \in \mathbb{R}$, da cui si ottiene l'espressione per P .

Si vede anche in modo esplicito che $Q + W$ è ottenuto traslando W :

$$Q + W = t_v(W)$$

con $v = Q - O = e_1 - e_2 + 2e_3$.

Vediamo ora che, mentre un punto e un sottospazio vettoriale individuano un sottospazio affine, non vale il viceversa. Precisamente: un sottospazio affine determina la sua giacitura ma non un suo punto preciso.

Proposizione 1.2.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V e $S = P + W$ è un suo sottospazio affine, allora

i) $\forall P' \in S$ vale che $S = P' + W$;

ii) se $S = P + W'$ allora $W' = W$;

iii) la giacitura di S può essere espressa come

$$W = \{B - A \mid A, B \in S\}.$$

Dimostrazione.

i) Osserviamo preliminarmente che, comunque scelto $P' \in S$, per la Proposizione 1.1.2 - (T2), esiste $w' \in W$ tale che $P' = P + w'$ e precisamente $w' = P' - P$. Di conseguenza, $-w' = P - P'$ e quindi $P = P' - w'$.

Si consideri ora un qualunque punto $Q \in S$ che è quindi del tipo $Q = P + w$. Allora $Q = (P' - w') + w = P' + (w - w') \in P' + W$ e questo prova che $S \subseteq P' + W$. L'altra inclusione è analoga e quindi lasciata al lettore.

ii) Immediata.

iii) Per provare l'inclusione $\{B - A \mid A, B \in S\} \subseteq W$, si osservi che se $A, B \in S$ allora tali punti sono del tipo $A = P + u$ e $B = P + w$ per opportuni $u, w \in W$. Dunque, utilizzando anche la Relazione di Chasles, si ottiene

$$B - A = (B - P) + (P - A) = w - u \in W.$$

Viceversa, per ogni $w \in W$, sia $Q_w = P + w \in S$. Dunque $w = Q_w - P$ ed entrambi i punti appartengono a S . $\square$

Visto lo stretto legame tra un sottospazio affine e la sua giacitura, è naturale dare la seguente nozione.

Definizione 1.2.2. Se $S = P + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, diciamo *dimensione* di S la dimensione di W come sottospazio vettoriale di V , cioè

$$\dim(S) := \dim_K(W).$$

In particolare, $\dim(S) = 0$ se e solo se S è un punto.

Se $\dim(S) = 1$ allora $S = P + \langle w \rangle$ si dice *retta affine* e w è detto *vettore direzionale* di S .

Se $\dim(S) = 2$ allora S si dice *piano affine*.

Se $\dim_K(V) = n$ e $\dim(S) = n - 1$ allora S si dice *iperpiano affine*.

Esercizio A2. Si provi che, se $\dim \mathbb{A} = n$ e S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$, allora vale: $\dim(S) = n \iff S = \mathbb{A}$.

Esercizio A3. Provare che ogni sottospazio affine $S = P + W$ è esso stesso uno spazio affine su W (vedi Definizione 1.1.1).

Esercizio A4. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}_K^n$ lo spazio affine numerico su K dotato del riferimento affine standard $(O, \mathcal{E})$ (vedi Definizione 1.1.6). Dunque ogni punto di $\mathbb{A}^n$ è anche un vettore di $V = K^n$ (e viceversa) e ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ è un sottoinsieme di K^n .

i) Se $P \in \mathbb{A}^n$ e $w \in K^n$, provare che il vettore $(P - O) + w$ e il punto $P + w$ coincidono nel senso precisato sopra.

ii) Sia $S = P + W$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$. Provare che S è sottospazio vettoriale di $K^n \iff S = W \iff O \in S$.

Osservazione 1.2.1. Se $S = P + W$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, esso può essere interpretato come il traslato della sua giacitura. Infatti $W \subseteq K^n = \mathbb{A}^n$ e sia $v := P - O$. Allora, posta

$$t_v : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

la corrispondente traslazione, è chiaro (tenendo conto dell'Esercizio A4) che

$$t_v(W) = \{v + w \mid w \in W\} = \{P + w \mid w \in W\} = P + W = S.$$

Osservazione 1.2.2. Ricordiamo che, dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite su K , espresso in forma matriciale da

$$\Sigma : AX = B$$

dove

$$A \in K^{m,n}, X = {}^t(x_1, \dots, x_n), B = {}^t(b_1, \dots, b_m)$$

è compatibile se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

Supponiamo che ciò accada e sia $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = r$. Allora è noto che lo spazio delle soluzioni di Σ è

$$S_\Sigma = \overline{X} + S_{\Sigma_0}$$

dove $\overline{X}$ è una soluzione particolare di Σ e $\Sigma_0 : AX = 0$ è il sistema lineare omogeneo associato a Σ . Essendo S_{Σ_0} un sottospazio vettoriale di K^n , è evidente che S_Σ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}_K^n$.

Inoltre, posta $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio, si ha che $\ker(L_A) = S_{\Sigma_0}$. D'altra parte (per il Teorema della dimensione) si ha che $\dim_K(\ker(L_A)) = n - r$. Pertanto

$$\dim(S_\Sigma) = \dim_K(S_{\Sigma_0}) = \dim_K(\ker(L_A)) = n - r.$$

Consideriamo ora l'intersezione di sottospazi affini e studiamo quando essa stessa è un sottospazio affine.

Proposizione 1.2.2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si consideri la famiglia di sottospazi affini $\{S_i\}_{i \in I}$ indicata su un insieme I , dove $S_i = P_i + W_i$ per ogni $i \in I$. Se $S := \bigcap_{i \in I} S_i$ allora si hanno due possibilità: o S è vuoto oppure è un sottospazio affine di giacitura $\bigcap_{i \in I} W_i$.*

Dimostrazione. Se $S \neq \emptyset$, si scelga un punto $Q \in S = \bigcap_{i \in I} S_i$. Ponendo $W := \bigcap_{i \in I} W_i$, vogliamo provare che

$$S = Q + W.$$

Sia $P \in S$; dunque $P \in S_i = Q + W_i$, per ogni $i \in I$. Quindi $P = Q + w_i$, per opportuni $w_i \in W_i$. Chiaramente $w_i = P - Q$ è un vettore indipendente da i ; ponendo $w := P - Q$ si ha quindi che $w \in W_i$ per ogni i , cioè $w \in W$. In conclusione, $P = Q + w$ e quindi $S \subseteq Q + W$.

Per provare l'altra inclusione, basta osservare che $Q + W \subseteq Q + W_i = S_i$, per ogni $i \in I$. Pertanto $Q + W \subseteq (\bigcap_{i \in I} S_i) = S$. $\square$

Una conseguenza del precedente risultato è la seguente formula “tipo Grassmann” per gli spazi affini.

Corollario 1.2.3. *Siano S e S' due sottospazi affini di $\mathbb{A}$ e sia $n = \dim \mathbb{A}$. Se $S \cap S' \neq \emptyset$ allora*

$$\dim(S \cap S') \geq \dim S + \dim S' - n.$$

Dimostrazione. Siano W e W' le giaciture di S e S' , rispettivamente. Per la Proposizione 1.2.2, il sottospazio affine $S \cap S'$ ha giacitura $W \cap W'$ e dunque $\dim(S \cap S') = \dim_K(W \cap W')$. D'altra parte, per il Teorema di Grassmann

$$\dim_K(W \cap W') = \dim_K W + \dim_K W' - \dim_K(W + W').$$

Ovviamente $\dim_K(W + W') \leq n$, quindi la relazione precedente implica

$$\dim_K(W \cap W') \geq \dim_K W + \dim_K W' - n,$$

da cui si ha la tesi. $\square$

Caratterizziamo l'intersezione non vuota nel caso di due sottospazi.

Proposizione 1.2.4. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n si considerino due sottospazi affini S e S' , dove $S = Q + W$ e $S' = Q' + W'$. Allora*

$$S \cap S' \neq \emptyset \iff Q - Q' \in W + W'.$$

In particolare, se $W + W' = V$ allora $S \cap S' \neq \emptyset$ e

$$\dim(S \cap S') = \dim S + \dim S' - n.$$

Dimostrazione. “ $\Rightarrow$ ” Sia $P \in S \cap S'$; dunque P è del tipo

$$P = Q + w = Q' + w'$$

per opportuni $w \in W$ e $w' \in W'$. Pertanto $P - Q = w$ e $P - Q' = w'$ e quindi, applicando SA2, si ottiene

$$Q - Q' = (Q - P) + (P - Q') = -w + w' \in W + W'.$$

“ $\Leftarrow$ ” Se $Q - Q' \in W + W'$ allora esistono due vettori $w \in W$ e $w' \in W'$ tali che $Q - Q' = w + w'$. Pertanto i punti $Q - w$ e $Q' + w'$ coincidono. Ma il primo appartiene a S e il secondo a S' , quindi $S \cap S' \neq \emptyset$.

Questo prova la prima parte. Si assuma ora che $W + W' = V$; in tal caso ovviamente $Q - Q' \in W + W'$ e quindi, per l'equivalenza appena provata, $S \cap S' \neq \emptyset$. Ripercorrendo la dimostrazione del Corollario 1.2.3 e tenendo conto del fatto che $\dim(W + W') = n$, si ha immediatamente la tesi. $\square$

Definizione 1.2.3. Due sottospazi affini si dicono *incidenti* se la loro intersezione non è vuota.

1.3 Sottospazi paralleli e sghembi

Definizione 1.3.1. Nello spazio affine $\mathbb{A}$ sullo spazio vettoriale V si considerino i due sottospazi affini S e S' di dimensione positiva e di giaciture W e W' , rispettivamente. Diciamo che S e S' sono *paralleli* se $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$. In tal caso scriveremo anche $S \parallel S'$.

Esempio 1.3.1. Si considerino i punti $Q = (2, 0, 1)$, $R = (1, 0, 0)$ di $\mathbb{A}^3$ e il sottospazio $W = \langle e_1 + 2e_2, e_3 \rangle$ e il vettore $v = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ di $\mathbb{R}^3$. La retta L passante per R e di vettore direzionale v è parallela al piano H passante per Q e di giacitura W , e inoltre $L \cap H = \emptyset$ .

Se $\dim S = \dim S'$ è chiaro che $S \parallel S' \iff W = W'$. In particolare, due rette sono parallele se i rispettivi vettori direzionali sono proporzionali.

Osservazione 1.3.1. La relazione di parallelismo tra sottospazi affini (di dimensioni diverse) non è transitiva: si pensi ad esempio a due rette in $\mathbb{A}^3$ che sono parallele a uno stesso piano, ma non tra loro.

Vediamo ora come si comportano sottospazi paralleli che si intersecano.

Proposizione 1.3.1. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si considerino i due sottospazi affini S e S' e sia $\dim S \leq \dim S'$. Se $S \parallel S'$ e $S \cap S' \neq \emptyset$ allora $S \subseteq S'$.*

Dimostrazione. Sia $Q \in S \cap S'$; allora possiamo scrivere $S = Q + W$ e $S' = Q + W'$. Per definizione di parallelismo e per l'ipotesi sulle dimensioni, deve essere $W \subseteq W'$. La tesi segue immediatamente. $\square$

Ne segue una proprietà ben nota nella Geometria classica.

Corollario 1.3.2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}$ si considerino un sottospazio affine S e un punto P . Allora esiste un unico sottospazio affine passante per P , parallelo a S e della stessa dimensione di S .*

Dimostrazione. Sia $S = Q + W$ e si ponga $S' = P + W$. Chiaramente S' soddisfa i requisiti richiesti. Supponiamo ora che esista un altro sottospazio affine S'' passante per P , parallelo a S e di uguale dimensione. Dunque S'' deve avere la stessa giacitura di S , pertanto $S'' = P + W = S'$. $\square$

Nel caso del piano affine $\mathbb{A}^2$, il Corollario precedente equivale al V Postulato di Euclide sulle rette parallele del piano.

Definizione 1.3.2. Due sottospazi affini di dimensione positiva si dicono *sghembi* se non sono paralleli e non hanno punti in comune.

Esempio 1.3.2. Siano Q , R , v ed L come nell'esempio precedente, e sia T la retta passante per Q e avente vettore direzionale e_3 . Le rette L e T sono sghembe .

Studiamo l'esistenza di coppie di sottospazi sghembi e, più in generale, la loro posizione reciproca.

Osservazione 1.3.2. Se $\dim \mathbb{A} = 2$, gli unici sottospazi affini non banali (cioè diversi da $\mathbb{A}$) e di dimensione positiva sono le rette. Siano dunque L e L' due rette di giaciture rispettive $W = \langle w \rangle$ e $W' = \langle w' \rangle$, rette vettoriali del K -spazio vettoriale V ove $\dim V = 2$. Si presentano 2 casi:

$$W + W' = \langle w, w' \rangle \begin{cases} = V \\ \subsetneq V \end{cases}.$$

Nel primo caso, per la Proposizione 1.2.4, si ha che $L \cap L' \neq \emptyset$ e precisamente $\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - 2 = 0$. Quindi L e L' sono incidenti in un punto.

Nel secondo caso necessariamente $\langle w \rangle = \langle w' \rangle$ e dunque, per definizione, L e L' sono parallele.

Osservazione 1.3.3. Se $\dim \mathbb{A} = 3$, i sottospazi affini non banali e di dimensione positiva sono i piani e le rette. Siano L e L' due rette e H e H' due piani, di giaciture rispettive L_0, L'_0, H_0, H'_0 . Si presentano quindi i seguenti casi, in cui si utilizza ancora la Proposizione 1.2.4.

I. Posizione reciproca di L e H

$$L_0 + H_0 \begin{cases} = V \Rightarrow \dim(L \cap H) = 0 : L, H \text{ incidenti in un punto} \\ \subsetneq V \Rightarrow L_0 \subset H_0 \Rightarrow L, H \text{ paralleli} \end{cases}$$

II. Posizione reciproca di H e H'

$$H_0 + H'_0 \begin{cases} = V \Rightarrow \dim(H \cap H') = 1 : H, H' \text{ incidenti in una retta} \\ \subsetneq V \Rightarrow H_0 = H'_0 \Rightarrow H \text{ e } H' \text{ paralleli} \end{cases}$$

III. Posizione reciproca di L e L'

In tal caso, $\dim L_0 = \dim L'_0 = 1$, quindi non può accadere che $L_0 + L'_0 = V$. I casi possibili sono dunque

$$\dim(L_0 + L'_0) = \begin{cases} = 2 \Rightarrow \begin{cases} L \cap L' \neq \emptyset \Rightarrow L \text{ e } L' \text{ incidenti in un punto} \\ L \cap L' = \emptyset \Rightarrow L \text{ e } L' \text{ sghembe} \end{cases} \\ = 1 \Leftrightarrow L_0 = L'_0 \Leftrightarrow L \text{ e } L' \text{ parallele} \end{cases}$$

1.4 Equazioni parametriche di sottospazi affini

Per fare qualche esempio delle situazioni sopra descritte, abbiamo bisogno di esprimere esplicitamente un sottospazio affine con delle equazioni. Per tale motivo, introduciamo qui una nozione utile allo scopo.

Definizione 1.4.1. Se T è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{A}$, diciamo *sottospazio affine generato da T* l'intersezione di tutti i sottospazi affini contenenti T e lo indichiamo con $[T]$. In particolare, se $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{A}$, il sottospazio affine generato da tali punti si indicherà con $[P_0, P_1, \dots, P_m]$.

Proposizione 1.4.1. Se $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{A}$ allora

$$[P_0, P_1, \dots, P_m] = P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle.$$

In particolare, $\dim([P_0, P_1, \dots, P_m]) \leq m$.

Dimostrazione. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ la famiglia dei sottospazi affini contenenti i punti $P_0, P_1, \dots, P_m$; quindi possiamo scrivere ognuno di essi come $T_i = P_0 + W_i$. Per la Proposizione 1.2.1-(iii), la giacitura W_i contiene i vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0$. Quindi, per la Proposizione 1.2.2,

$$[P_0, P_1, \dots, P_m] = P_0 + \bigcap_{i \in I} W_i \supseteq P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle.$$

Basta ora provare che il sottospazio affine $P_0 + \langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle$ contiene tutti i punti $P_0, P_1, \dots, P_m$. Contenendo P_0 ed essendo il vettore $P_1 - P_0$ nella sua giacitura, contiene anche il punto $P_0 + (P_1 - P_0) = P_1$; analogamente gli altri. $\square$

Se lo spazio generato dai punti $P_0, P_1, \dots, P_m$ è una retta, diremo che tali punti sono *allineati*; se è un piano diremo che essi sono *complanari*.

Definizione 1.4.2. Se per $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{A}$ vale l'uguaglianza nella Proposizione 1.4.1, cioè se

$$\dim([P_0, P_1, \dots, P_m]) = m,$$

allora diremo che tali punti sono *affinemente indipendenti*.

Dunque (con le notazioni della Proposizione 1.4.1) punti affinemente indipendenti generano un sottospazio $[P_0, P_1, \dots, P_m]$ di dimensione massima; equivalentemente, la sua giacitura $\langle P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0 \rangle$ ha dimensione m . A sua volta questo equivale al fatto che gli m vettori $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_m - P_0$ siano una sua base.

Se invece un sottospazio affine è fornito nel modo solito, cioè $S = Q + W$, con $\dim S = \dim_K(W) = s$, si scelga una base $(w_1, \dots, w_s)$ di W . Allora, se P denota il generico punto di $\mathbb{A}$,

$$P \in S \iff \exists t_1, \dots, t_s \in K \quad \text{tali che} \quad P = Q + t_1 w_1 + \dots + t_s w_s.$$

Dunque si ottengono tutti e soli i punti di S al variare de *parametri* $t_1, \dots, t_s$ in K .

Definizione 1.4.3. Con le notazioni precedenti, diremo che

$$S: \quad P = Q + t_1 w_1 + \dots + t_s w_s$$

è una *equazione vettoriale* di S .

Si fissi ora un sistema di riferimento affine $(O; e_1, \dots, e_n)$ su $\mathbb{A}$ e rispetto ad esso sia $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}$ e siano

$$w_1 = w_{11}e_1 + \dots + w_{n1}e_n, \quad \dots, \quad w_s = w_{1s}e_1 + \dots + w_{ns}e_n.$$

Se P è il generico punto di $\mathbb{A}$, in tale sistema le coordinate di P si denotino con $(x_1, \dots, x_n)$.

In questo modo, l'equazione vettoriale di S può essere letta scalarmente

$$S: (x_1, \dots, x_n) = (q_1, \dots, q_n) + t_1(w_{11}, \dots, w_{n1}) + \dots + t_s(w_{1s}, \dots, w_{ns})$$

o anche

$$S: \quad \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_s w_{1s} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + \dots + t_s w_{2s} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_s w_{ns} \end{cases}.$$

Definizione 1.4.4. L'espressione precedente si dice *equazione parametrica* di S , dove $t_1, \dots, t_s$ sono i *parametri*.

Esempio 1.4.1. Se L è una retta passante per il punto Q e vettore direzionale v , la sua equazione vettoriale è del tipo

$$L: \quad P = Q + tv$$

e, se $Q = (q_1, \dots, q_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$, quella parametrica è

$$L: \quad \begin{cases} x_1 = q_1 + tv_1 \\ x_2 = q_2 + tv_2 \\ \vdots \\ x_n = q_n + tv_n \end{cases}.$$

Esempio 1.4.2. Se L è una retta passante per i punti A e B , la sua equazione vettoriale è del tipo

$$L: \quad P = A + t(B - A)$$

e, se $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$, quella parametrica è

$$L: \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ \vdots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n) \end{cases}.$$

Esempio 1.4.3. Siano $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, -2, 1)$ due punti di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$. Il vettore $v = B - A = (-1, -3, 1)$ è un vettore direzionale per la retta r passante per A e B . Le sue equazioni parametriche sono

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}.$$

Esercizio A5. Scrivere le equazioni vettoriale e parametrica del piano di $\mathbb{A}^n$ passante per i punti A , B e C , dove $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ e $C = (c_1, \dots, c_n)$.

1.5 Equazioni cartesiane di sottospazi affini

Per determinare un ulteriore tipo di equazione di un sottospazio affine (la sua “equazione cartesiana”), iniziamo con lo studiare il caso di un sottospazio vettoriale. Ricordiamo anzitutto un risultato di Algebra lineare.

Teorema 1.5.1. *Sia V un K -spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Valgono i seguenti fatti.*

- i) *Per ogni sistema lineare omogeneo Σ in n incognite di rango r , il suo spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ di dimensione $n - r$.*
- ii) *Viceversa, se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - r$, esiste un sistema lineare omogeneo Σ in n incognite di rango r il cui spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta W .*

Osservazione 1.5.1.

- i) Nell’enunciato precedente, “rappresenta” fa riferimento all’isomorfismo, indotto dalla scelta della base $\mathcal{B}$ di V e della base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ di K^n , dato da

$$\alpha : V \longrightarrow K^n \quad \text{dove} \quad \alpha(v_i) = e_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- ii) Nel punto (i) del Teorema 1.5.1 per ogni Σ è individuato un unico sottospazio vettoriale W , mentre, nel punto (ii) del Teorema, per ogni sottospazio il sistema lineare omogeneo che lo definisce non è unico.
- iii) Il punto (i) del Teorema 1.5.1 consiste nel risolvere il sistema Σ ; il punto (ii) fornisce invece un nuovo tipo di equazione per W .

Definizione 1.5.1. Un sistema lineare omogeneo Σ il cui spazio delle soluzioni rappresenta un sottospazio vettoriale W di V si dice *equazione cartesiana* di W .

Esempio 1.5.1. Siano $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \langle (1, 2, 3), (-4, 0, 5) \rangle$. Per trovare il sistema lineare omogeneo Σ in 3 incognite di rango $3 - \dim(W) = 1$ il cui spazio delle soluzioni S_Σ è W basta osservare che un vettore v appartiene a W se e solo se è combinazione lineare dei vettori della base scelta di W . Esplicitamente:

$$v = (x, y, z) \in W \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando questo determinante si ottiene

$$v = (x, y, z) \in W \iff 10x - 17y + 8z = 0.$$

Nell'esempio precedente W era un iperpiano di V e dunque il sistema lineare associato era costituito da una sola equazione. Vediamo come procedere più in generale.

Sia $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ un sottospazio vettoriale di V di dimensione s . Sia vettore $v \in V$ un generico vettore. Allora

$$v \in W \iff \dim \langle v, w_1, \dots, w_s \rangle = s.$$

Posta $\dim(V) = n$, se $M \in K^{s+1, n}$ è la matrice avente per righe le componenti di $v, w_1, \dots, w_s$ su una base scelta $\mathcal{B}$ di V , allora

$$v \in W \iff \text{rk}(M) = s.$$

Si osservi che $\text{rk}(M) \geq s$ in quanto le ultime s righe di M sono linearmente indipendenti essendo $w_1, \dots, w_s$ vettori linearmente indipendenti. Dunque, per il Teorema degli orlati (vedi Appendice di questo Capitolo), $\text{rk}(M) = s$ se e solo se tutti i minori $(s+1) \times (s+1)$ che orlano un minore non degenerare $s \times s$ sono degeneri.

Per facilitare il ragionamento, si supponga che il minore N costituito dalle prime s componenti dei vettori $w_1, \dots, w_s$ sia non degenerare. I minori $(s+1) \times (s+1)$ che orlano N si ottengono aggiungendo, di volta in volta, una delle colonne $C_{s+1}, \dots, C_n$ di M e dunque sono $n - s$ minori. Ognuno dei determinanti di tali minori è un'equazione lineare omogenea in $x_1, \dots, x_n$.

Pertanto $\text{rk}(M) = s$ se e solo se le componenti $x_1, \dots, x_n$ di v soddisfano un sistema lineare omogeneo Σ di $n - s$ equazioni. Ovviamente tali equazioni risultano indipendenti in quanto lo spazio delle soluzioni S_Σ , rappresentando W , deve avere dimensione s . Diremo che Σ è un'equazione cartesiana di W .

Esempio 1.5.2. Siano $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \langle (1, 3, -1, 4), (2, 3, 0, 1) \rangle$. Per trovare l'equazione cartesiana di W , cioè il sistema lineare omogeneo Σ in 4 incognite di rango $4 - \dim(W) = 2$ il cui spazio delle soluzioni S_Σ è W basta osservare che

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W \iff \text{rk} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Per esprimere numericamente l'ultima condizione, osserviamo che il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è non degenerare. Quindi, calcolando i determinanti dei due minori 3×3 che lo orlano (costituiti, rispettivamente, dalle prime 3 colonne e dalle colonne 1,2,4) si ottengono 2 equazioni lineari indipendenti. Pertanto un'equazione cartesiana di W è, ad esempio,

$$W : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -9x_1 + 7x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ora ritorniamo alla questione iniziale. Tenendo conto della relazione tra lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare e quello del sistema omogeneo associato (vedi Osservazione 1.2.2), si prova immediatamente il risultato analogo al Teorema 1.5.1.

Teorema 1.5.2. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su V e si fissi un suo sistema di riferimento $(O; \mathcal{B})$. Valgono i seguenti fatti.*

- i) *Per ogni sistema lineare compatibile $\Sigma : AX = B$ in n incognite di rango r , il suo spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta un sottospazio affine S di dimensione $n - r$.*
- ii) *Viceversa, se S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ di dimensione $n - r$, esiste un sistema lineare $\Sigma : AX = B$ in n incognite di rango r il cui spazio delle soluzioni S_Σ rappresenta S .*

Definizione 1.5.2. Un sistema lineare $\Sigma : AX = B$ come nel Teorema 1.5.2 è detto una *equazione cartesiana* del sottospazio affine S .

Usando l'Osservazione 1.2.2, dato $S = Q + W$, con $Q \in \mathbb{A}$ e $W \subset V$ giacitura di S , è sufficiente determinare l'equazione cartesiana di W , cioè un sistema lineare omogeneo $\Sigma_0 : AX = 0$. A questo punto basta osservare che $P \in S \iff P - Q \in W \iff P - Q$ è soluzione di Σ_0 . Quindi $A(P - Q) = 0$ è un'equazione cartesiana di S .

Abbiamo in tal modo provato il seguente risultato.

Proposizione 1.5.3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n e si fissi un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$. Sia $S = Q + W$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ con $Q = (q_1, \dots, q_n)$. Se la giacitura W ha equazione cartesiana*

$$W : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= 0 \end{cases}$$

allora una equazione cartesiana di S è data da

$$S : \begin{cases} a_{11}(x_1 - q_1) + a_{12}(x_2 - q_2) + \dots + a_{1n}(x_n - q_n) &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}(x_1 - q_1) + a_{r2}(x_2 - q_2) + \dots + a_{rn}(x_n - q_n) &= 0 \end{cases}$$

□

Esempio 1.5.3. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3$. Vogliamo determinare l'equazione cartesiana della retta L passante per $Q = (1, 5, 2)$ e avente direzione $w = (2, -1, 4)$.

Anzitutto determiniamo l'equazione cartesiana della giacitura W di L che sarà un sistema lineare omogeneo di rango pari a

$$s = \dim(\mathbb{A}^3) - \dim(L) = 3 - 1 = 2.$$

Come visto tale equazione si ottiene da

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 1.$$

Questo impone, ad esempio, le 2 condizioni indipendenti (ottenute dai due minori che orlano il minore 1×1 costituito dal numero 2)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pertanto

$$W : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi, per la Proposizione 1.5.3, l'equazione cartesiana della retta in questione è

$$L : \begin{cases} (x_1 - 1) + 2(x_2 - 5) = 0 \\ 2(x_1 - 1) - (x_3 - 2) = 0 \end{cases}.$$

Esempio 1.5.4. Determinare il piano H passante per i punti di $\mathbb{A}^3$:

$$A = (0, 1, 2), \quad B = (1, -1, 3), \quad C = (1, 0, -1).$$

Si osservi innanzitutto che tale piano è unico se e solo se i 3 punti non sono allineati se e solo se i vettori $B - A$ e $C - A$ non sono paralleli. Tale condizione verrà verificata nello svolgimento.

Tenuto conto che $H = A + W$, determiniamo dapprima la giacitura W . Visto che $W = \langle B - A, C - A \rangle$ e $B - A = (1, -2, 1)$ e $C - A = (1, -1, -3)$, si ha

$$W : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$W : 7x + 4y + z = 0.$$

Pertanto, come visto in Proposizione 1.5.3, $H : 7x + 4(y - 1) + (z - 2) = 0$ da cui

$$H : 7x + 4y + z - 6 = 0.$$

Esempio 1.5.5. Per passare dalle equazioni cartesiane alle equazioni parametriche di un sottospazio affine si può risolvere il sistema col metodo di eliminazione di Gauss. Vediamo un caso numerico: sia $L \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ il piano affine di equazioni cartesiane

$$L: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

La soluzione del sistema in questo caso è immediata, e fornisce le equazioni parametriche per L

$$L: \begin{cases} x_1 = 5t_1 - 3t_2 + 5 \\ x_2 = -3t_1 + t_2 - 2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}.$$

Esempio 1.5.6. Non tutti i sistemi di equazioni parametriche lineari in k parametri definiscono un sottospazio affine di dimensione k . Per esempio, le equazioni seguenti non definiscono un piano in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$

$$\begin{cases} x = 3s - 6t + 1 \\ y = -3s + 6t - 2 \\ z = s - 2t \end{cases}.$$

Infatti in questo caso i vettori colonna

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

formati dai coefficienti dei parametri s e t sono linearmente dipendenti essendo $2v + w = 0$.

1.6 Calcolo della posizione reciproca di sottospazi

Abbiamo visto le varie possibilità nei Paragrafi 1.2 e 1.3. Vediamo ora come procedere esplicitamente nel calcolo con l'uso dei vari tipi di equazioni visti in precedenza. L'ambiente sarà lo spazio affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_K^n$, di dimensione $n \geq 2$, sul campo K .

Iniziamo studiando la posizione reciproca di 2 iperpiani.

Iperpiani di $\mathbb{A}^2$ (rette nel piano)

In questo caso, gli iperpiani sono delle rette. Siano dunque date 2 rette in equazione cartesiana

$$r : \quad ax + by + c = 0, \quad r' : \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

Come visto nell'Osservazione 1.3.2, ci sono solo due possibilità: o r e r' sono incidenti in un punto o sono parallele. Vediamo come determinare algebricamente la loro posizione reciproca.

Per definizione $r \parallel r'$ se e solo se hanno la stessa giacitura. Poiché tali giaciture sono, rispettivamente, $ax + by = 0$ e $a'x + b'y = 0$, questo accade se e solo se il sistema lineare omogeneo dato da tali equazioni ha rango 1. Tuttavia occorre distinguere, in questo caso, se le rette sono parallele e distinte o coincidenti. Le due possibilità sono determinate dallo studio del sistema costituito dalle equazioni di r e r' , nel caso in cui non abbia soluzioni oppure nel caso che ne abbia infinite.

D'altra parte, r e r' sono incidenti in un unico punto P se e solo se le coordinate di P costituiscono l'unica soluzione comune alle equazioni delle due rette.

Abbiamo provato dunque il seguente risultato.

Teorema 1.6.1. *Sia $(O; (e_1, e_2))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^2$ e siano (x, y) le coordinate del generico punto. Siano date due rette*

$$r : \quad ax + by + c = 0, \quad r' : \quad a'x + b'y + c' = 0$$

e si consideri il sistema lineare

$$\Sigma : \quad \begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{cases}$$

la cui matrice completa è

$$(A, B) := \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array} \right).$$

Allora:

i) $r \parallel r' \iff \text{rk}(A) = 1$. In tal caso,

- $r \neq r' \iff \text{rk}(A, B) = 2$
- $r = r' \iff \text{rk}(A, B) = 1$.

ii) $r \cap r' = \{P\} \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A, B) = 2$.

In tal caso, le coordinate del punto P sono l'unica soluzione del sistema lineare Σ . $\square$

Iperpiani di $\mathbb{A}^3$ (piani nello spazio)

In completa analogia con quanto visto nel caso delle rette nel piano, vediamo il corrispondente enunciato riguardo agli iperpiani di $\mathbb{A}^3$ (la dimostrazione è omessa in quanto sostanzialmente identica al caso precedente).

Teorema 1.6.2. *Sia $(O; (e_1, e_2, e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ e siano (x, y, z) le coordinate del generico punto. Siano dati due piani*

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0, \quad \pi' : \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

e si consideri il sistema lineare

$$\Sigma : \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

la cui matrice completa è

$$(A, B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right).$$

Allora:

i) $\pi \parallel \pi' \iff \text{rk}(A) = 1$. In tal caso,

- $\pi \neq \pi' \iff \text{rk}(A, B) = 2$
- $\pi = \pi' \iff \text{rk}(A, B) = 1$.

ii) $\pi \cap \pi' = r$ (retta) $\iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A, B) = 2$.

In tal caso, le coordinate dei punti della retta r sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare Σ . $\square$

Una retta e un piano di $\mathbb{A}^3$

Tenendo conto del Teorema 1.6.2 che descrive la posizione reciproca di 2 piani nello spazio, se è data una retta in $\mathbb{A}^3$ di equazione cartesiana

$$r : \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

allora la matrice dei coefficienti di tale sistema lineare e la sua matrice completa hanno entrambe rango 2. Se si considera un piano π , è chiaro che la posizione reciproca di r e π viene descritta da una matrice in cui compaiono tutti i coefficienti in gioco e che non può avere rango minore di 2. Si ha dunque il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata al lettore.

Teorema 1.6.3. Sia $(O; (e_1, e_2, e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ con coordinate (x, y, z) . Siano dati una retta r e un piano π di equazioni

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \quad \pi: \quad a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

e sia Σ il sistema lineare costituito dalle 3 precedenti equazioni, la cui matrice è

$$(A, B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right).$$

Allora:

i) $r \parallel \pi \iff \text{rk}(A) = 2$. In tal caso,

- $r \cap \pi = \emptyset \iff \text{rk}(A, B) = 3$

- $r \subset \pi \iff \text{rk}(A, B) = 2$.

ii) $r \cap \pi = \{P\}$ (punto) $\iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A, B) = 3$.

In tal caso, le coordinate di P sono l'unica soluzione del sistema Σ . $\square$

Esempio 1.6.1. In $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^3$ consideriamo la retta r di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e il piano π di equazione

$$\pi: x + y + z = 1.$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni di r e di π si ottiene la loro intersezione, che risulta il punto $P = (0, 3/5, 2/5)$ .

Due rette di $\mathbb{A}^3$

Anche in questo caso, se sono date 2 rette nello spazio in equazione cartesiana, la descrizione della loro posizione reciproca si riconduce allo studio del sistema lineare costituito dalle rispettive equazioni. Tuttavia qui si presenta un caso nuovo, come descritto nell'Osservazione 1.3.3.

Come nel caso precedente, osserviamo preliminarmente che ognuna delle due rette ha come equazione cartesiana un sistema lineare di rango 2; pertanto anche il sistema lineare costituito dalle 4 equazioni ha la matrice dei coefficienti di rango almeno 2.

Teorema 1.6.4. *Sia $(O; (e_1, e_2, e_3))$ un sistema di riferimento in $\mathbb{A}^3$ con coordinate (x, y, z) . Siano date due rette r e s di equazioni*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z + \delta' = 0 \end{cases},$$

e sia Σ il sistema lineare costituito dalle 4 precedenti equazioni, la cui matrice è

$$(A, B) := \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{array} \right).$$

Allora:

- i) $\text{rk}(A) = 2 \iff r$ e s hanno la stessa giacitura. In tal caso,
 - (i₁) $r = s \iff \text{rk}(A, B) = 2$.
 - (i₂) $r \cap s = \emptyset \iff \text{rk}(A, B) = 3$ (le 2 rette sono parallele e distinte);
- ii) $\text{rk}(A) = 3 \iff r$ e s hanno diverse giaciture. In tal caso,
 - (ii₁) $r \cap s = \{P\}$ (punto) $\iff \text{rk}(A, B) = 3$ e le coordinate di P sono l'unica soluzione del sistema lineare Σ .
 - (ii₂) r e s sono sghembe $\iff \text{rk}(A, B) = 4$.

Dimostrazione. Per comodità si denotino con R_1, R_2, R_3, R_4 le righe della matrice A .

(i) È chiaro che $\text{rk}(A) = 2$ se e solo se $R_3, R_4 \in \langle R_1, R_2 \rangle$ e $R_1, R_2 \in \langle R_3, R_4 \rangle$. Quest'ultima condizione, a sua volta, è equivalente al fatto che i sistemi lineari omogenei

$$AX = 0, \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} X = 0, \quad \begin{pmatrix} R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} X = 0$$

sono equivalenti, cioè hanno lo stesso spazio delle soluzioni. D'altra parte gli spazi delle soluzioni del secondo e del terzo di tali sistemi sono, rispettivamente, la giacitura di r e s . Pertanto l'equivalenza è provata.

(i₁) Per il Teorema di Rouché–Capelli, il sistema Σ è risolubile se e solo se $\text{rk}(A, B) = 2$. In tal caso, esso ha ∞^1 soluzioni; dunque $r \cap s$ è costituita da infiniti punti e si ha la tesi.

(i₂) Se invece $\text{rk}(A, B) = 3$, ancora per il Teorema di Rouché–Capelli, il sistema Σ non è risolubile. Pertanto $r \cap s = \emptyset$. Viceversa, se $r \cap s = \emptyset$ necessariamente $2 = \text{rk}(A) \neq \text{rk}(A, B)$. Pertanto deve essere $\text{rk}(A, B) = 3$.

(ii) L'equivalenza è una riformulazione dell'equivalenza (i).

Le affermazioni (ii₁) e (ii₂) sono lasciate al lettore. $\square$

Posizione reciproca di sottospazi affini in equazione parametrica

La posizione reciproca di due sottospazi affini nel caso in cui uno sia in equazione parametrica e l'altro in cartesiana si determina sostituendo le coordinate del generico punto del primo nell'equazione cartesiana del secondo e risolvendo il sistema ottenuto.

Nel caso in cui entrambi siano in equazione parametrica, si possono uguagliare le rispettive coordinate, avendo cura di cambiare nome ai parametri.

Entrambi i casi vengono illustrati nei seguenti esempi.

Esempio 1.6.2. Determinare la posizione reciproca della retta r e del piano π di $\mathbb{A}^3$, dove

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad \pi : 2x + 3y + z - 15 = 0.$$

Il generico punto di r è $P(t) = (1 + 2t, 3t, -1 + t)$; sostituendo le sue coordinate nell'equazione di π si ottiene

$$2(1 + 2t) + 3(3t) + (-1 + t) - 15 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Pertanto r e π sono incidenti nel punto $P(1) = (3, 3, 0)$.

Esempio 1.6.3. Determinare la posizione reciproca delle rette r e s di $\mathbb{A}^3$, dove

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

Si osservi inizialmente che le giaciture di r e s sono $\langle(1, -1, 1)\rangle$ e $\langle(2, 3, 1)\rangle$, rispettivamente, le quali sono chiaramente distinte. Dunque le rette r e s non sono parallele. Per determinare se sono incidenti o sghembe, calcoliamo la loro intersezione.

Prima di tutto, occorre cambiare il nome al parametro di una delle due rette; ad esempio, chiamare λ il parametro di r .

Il generico punto di r è $R(\lambda) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 2 + \lambda)$, mentre il generico punto di s è $S(t) = (1 + 2t, 3t, -1 + t)$. Vediamo se esistono valori di λ e t per cui $R(\lambda) = S(t)$.

$$r \cap s : \begin{cases} 1 + \lambda = 1 + 2t \\ 2 - \lambda = 3t \\ 2 + \lambda = -1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2t \\ -\lambda = -2 + 3t \\ \lambda = -3 + t \end{cases}.$$

Dalla prima e terza equazione si ottiene $2t = -3 + t$, da cui $t = -3$. Sostituendo nel sistema precedente si ottiene

$$\begin{cases} \lambda = -6 \\ -\lambda = -11 \\ \lambda = -6 \end{cases}.$$

e tale sistema è ovviamente incompatibile. Pertanto r e s sono sghembe.

1.7 Fasci di rette e fasci di piani

Si considerino le rette di $\mathbb{A}^2$ date da

$$r : ax + by + c = 0, \quad r' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Si osservi che, se $r \cap r' = \{P\}$, allora per ogni $\lambda, \mu \in K$ (purché non entrambi nulli) l'espressione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$$

è l'equazione cartesiana di una retta per P .

Infatti, tale equazione rappresenta una retta in quanto è un sistema lineare di rango 1 poiché $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0, 0)$ per ogni scelta di $\lambda, \mu \in K$ non entrambi nulli. Se così non fosse, il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = 0 \\ \lambda b + \mu b' = 0 \end{cases}$$

avrebbe una soluzione (λ, μ) non nulla e dunque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

contro il Teorema 1.6.1. Tale retta, chiaramente, passa per $P = (x_0, y_0)$: infatti $P \in r$ e $P \in r'$ e quindi $ax_0 + by_0 + c = 0$ e anche $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$. Pertanto si ha l'identità $\lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') \equiv 0$.

Definizione 1.7.1. Se P è un punto di $\mathbb{A}^2$, diciamo *fascio (proprio) di rette di sostegno (o centro) P* l'insieme di tutte e sole le rette passanti per P e verrà indicato anche con Φ_P .

Se r è una retta di $\mathbb{A}^2$, diciamo *fascio (improprio) di rette parallele a r* l'insieme di tutte e sole le rette aventi la stessa giacitura di r .

Teorema 1.7.1. Si considerino due rette incidenti di $\mathbb{A}^2$

$$r : ax + by + c = 0, \quad r' : a'x + b'y + c' = 0$$

e sia $P = r \cap r'$. Allora, per ogni $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'equazione

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{1.1}$$

rappresenta una retta del fascio di rette Φ_P . Viceversa, comunque scelta una retta $s \in \Phi_P$, esistono $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in K$ tali che

$$\bar{\lambda}(ax + by + c) + \bar{\mu}(a'x + b'y + c') = 0$$

è un'equazione cartesiana di s .

Dimostrazione. Abbiamo appena provato la prima affermazione. Viceversa sia $s : \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ una retta per P . Se $s = r$ allora basta prendere $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (1, 0)$, mentre se $s = r'$ basta prendere $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (0, 1)$. Sia allora $s \neq r$ e $s \neq r'$. In tal caso, si può scegliere un punto $Q = (q_1, q_2) \in s$ con $Q \neq P$; di conseguenza $Q \notin r$ e $Q \notin r'$. Quindi

$$aq_1 + bq_2 + c \neq 0, \quad a'q_1 + b'q_2 + c' \neq 0.$$

Pertanto l'equazione in λ e μ

$$\lambda(aq_1 + bq_2 + c) + \mu(a'q_1 + b'q_2 + c') = 0$$

ammette infinite soluzioni (tra l'altro tutte proporzionali). Sia $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una di queste. Dunque

$$\bar{\lambda}(aq_1 + bq_2 + c) + \bar{\mu}(a'q_1 + b'q_2 + c') = 0$$

è un'identità e dunque Q appartiene alla retta $\bar{\lambda}(ax + by + c) + \bar{\mu}(a'x + b'y + c') = 0$. Ma tale retta contiene anche P , dunque è esattamente la retta s . $\square$

L'equazione (1.1) del precedente enunciato definisce il fascio di rette Φ_P . Scriveremo dunque

$$\Phi_P : \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0, \quad (\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Si osservi, inoltre, che coppie (λ, μ) proporzionali individuano la stessa retta del fascio.

Definizione 1.7.2. Le rette r e r' sono dette *generatori* per il fascio Φ_P scritto nella forma (1.1).

È chiaro che ogni coppia di rette di Φ_P può essere considerata come coppia di generatori del fascio stesso.

Esempio 1.7.1. Consideriamo il punto $A = (1, 3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Per trovare l'equazione del fascio di centro A è sufficiente determinare due rette del fascio. Le più semplici sono le rette di equazioni $x = 1$ e $y = 3$. Quindi

$$\Phi_A : \lambda(x - 1) + \mu(y - 3) = 0.$$

Esempio 1.7.2. Consideriamo le rette di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$

$$r : 2x + y + 1 = 0, \quad r' : x - y - 2 = 0.$$

La generica retta del fascio proprio generato da r e r' ha equazione

$$(2\lambda + \mu)x + (\lambda - \mu)y + \lambda - 2\mu = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Il centro del fascio è il punto $r \cap r' = \{(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})\}$ $\textcircled{A}$.

Per trovare la retta del fascio passante per $(1, 0)$ si consideri una soluzione non banale dell'equazione

$$2\lambda + \mu + \lambda - 2\mu = 0.$$

Scegliamo $(\lambda, \mu) = (1, 3)$, e la retta cercata ha equazione

$$5x - 2y - 5 = 0.$$

Proposizione 1.7.2. *Data la retta $r : ax + by + c = 0$ di $\mathbb{A}^2$, il fascio improprio di rette parallele a r è costituito da tutte e sole le rette del tipo*

$$ax + by + k = 0, \quad k \in K. \quad (1.2)$$

Dimostrazione. Per definizione, una retta è parallela a r se e solo se ha la sua stessa giacitura. In questo caso quest'ultima ha equazione cartesiana $ax + by = 0$. Si ha dunque immediatamente la tesi. $\square$

Esempio 1.7.3. Consideriamo il fascio improprio di rette di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ parallele alla retta r di equazione

$$r : ix + y = 0.$$

La retta del fascio passante per il punto $(1, i)$ ha equazione $\textcircled{A}$

$$ix + y - 2i = 0.$$

Esercizio A6. Provare che l'equazione (1.2) può anche essere vista come

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(ax + by + c') = 0, \quad (1.3)$$

determinando esplicitamente il legame tra i parametri λ , μ e k delle due equazioni.

Dal Teorema 1.7.1, dalla Proposizione 1.7.2 e dall'esercizio precedente, confrontando le equazioni (1.1) e (1.3) segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1.7.3. *Si considerino tre rette di $\mathbb{A}^2$ di equazioni*

$$\begin{aligned} r : \quad ax + by + c &= 0, \\ r' : \quad a'x + b'y + c' &= 0. \\ r'' : \quad a''x + b''y + c'' &= 0 \end{aligned}$$

Esse appartengono a uno stesso fascio se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

La semplice dimostrazione del seguente risultato è lasciata per esercizio.

Proposizione 1.7.4. *Dato il fascio proprio di rette Φ_P , per ogni $Q \in \mathbb{A}^2$, $Q \neq P$, esiste un'unica retta $r_Q \in \Phi_P$ passante per Q .*

Analogamente, dato il fascio improprio di rette Φ_r , per ogni $Q \in \mathbb{A}^2$, esiste un'unica retta $s_Q \in \Phi_r$ passante per Q .

Possiamo procedere in modo analogo per i piani nello spazio affine.

Definizione 1.7.3. Se r è una retta di $\mathbb{A}^3$, diciamo *fascio (proprio) di piani di sostegno r* l'insieme $\mathcal{F}_r$ di tutti e soli i piani contenenti r .

Se π è un piano di $\mathbb{A}^3$, diciamo *fascio (improprio) di piani paralleli a π* l'insieme di tutti e soli i piani aventi la stessa giacitura di π .

Valgono i seguenti risultati (analoghi al Teorema 1.7.1 e alla Proposizione 1.7.2) dei quali omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.7.5. *Si considerino due piani incidenti di $\mathbb{A}^3$*

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \quad \pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

e sia $r = \pi \cap \pi'$. Allora, per ogni $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$, l'equazione

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \quad (1.4)$$

rappresenta un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di sostegno r . Viceversa, per ogni piano $\sigma \in \mathcal{F}_r$, esistono $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in K$ tali che

$$\bar{\lambda}(ax + by + cz + d) + \bar{\mu}(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

è un'equazione cartesiana di σ .

Proposizione 1.7.6. *Dato il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ di $\mathbb{A}^3$, il fascio improprio di piani paralleli a π è costituito da tutti e soli i piani del tipo*

$$ax + by + cz + k = 0, \quad k \in K. \quad (1.5)$$

Si ha dunque immediatamente la seguente caratterizzazione.

Corollario 1.7.7. *Si considerino tre piani di $\mathbb{A}^3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi : ax + by + cz + d &= 0, \\ \pi' : a'x + b'y + c'z + d' &= 0, \\ \pi'' : a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

Essi appartengono a uno stesso fascio se e solo se

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2.$$

La nozione di *generatori* di un fascio di piani è analoga a quella data per i fasci di rette.

Vale anche l'analogo della Proposizione 1.7.4, lasciato per esercizio.

Esempio 1.7.4. Consideriamo i piani di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ di equazioni

$$a: x - 2y - 3z = 0, \quad b: 2x + y + 1 = 0.$$

È facile vedere che a e b si intersecano lungo una retta e quindi generano un fascio proprio di piani. I piani del fascio hanno un'equazione del tipo

$$(\lambda + 2\mu)x - (2\lambda - \mu)y - 3\lambda z + \mu = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Concludiamo con una nozione diversa da quella di fascio: in entrambi i casi dei fasci di rette e dei fasci di piani si tratta di famiglie costituite da ∞^1 sottospazi affini.

Definizione 1.7.4. Se P è un punto di $\mathbb{A}^3$, diciamo *stella di piani di sostegno* P l'insieme di tutti e soli i piani passanti per P e verrà indicata anche con Σ_P .

Si prova facilmente che, se

$$\begin{aligned} \pi: \quad ax + by + cz + d &= 0, \\ \pi': \quad a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ \pi'': \quad a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

sono tre piani passanti per un punto P e *non appartenenti a uno stesso fascio*, allora la stella di piani di sostegno P ha equazione

$$\Sigma_P: \lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') + \nu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0$$

ed è dunque costituita da ∞^2 piani.

1.8 Applicazioni affini e affinità

Avendo introdotto la struttura geometrica di spazio affine, definiamo la corrispondente nozione di morfismo.

Definizione 1.8.1. Siano V e V' due K -spazi vettoriali e siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ due spazi affini, rispettivamente su V e V' . Diciamo che una applicazione $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è una *applicazione affine* se esiste un'applicazione K -lineare $\varphi : V \rightarrow V'$ (detta *parte lineare* di f) tale che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$, vale

$$f(Q) - f(P) = \varphi(Q - P).$$

In particolare, se f è biunivoca e φ è un isomorfismo di spazi vettoriali, diremo che f è un *isomorfismo affine*. In tal caso, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ si dicono *isomorfi* e scriveremo $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$.

Osservazione 1.8.1. Lo spazio affine numerico $\mathbb{A}_K^n$ si può riguardare come un sottospazio affine di $\mathbb{A}_K^m$ per ogni $m > n$, mediante l'applicazione affine iniettiva (*inclusione canonica*)

$$j : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

definita come

$$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Nel caso reale, prendendo $n = 1$ e $m = 2$, si ottiene l'inclusione della retta affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ nel piano $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ mediante $x \mapsto (x, 0) \forall x \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$, cioè si ottiene la retta rappresentata dall'asse x .

Esempio 1.8.1. Un sistema di equazioni parametriche per un sottospazio affine $L \subset \mathbb{A}^n$ di dimensione k è equivalente a un'applicazione affine iniettiva (*immersione affine*) $f : \mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{A}^n$, con $f(\mathbb{A}^k) = L$ (cfr. Esempio 1.5.5).

Osservazione 1.8.2. La parte lineare φ è univocamente determinata dall'applicazione affine f . Infatti, per ogni $v \in V$ esistono $P, Q \in \mathbb{A}$ tali che $v = Q - P$ (vedi Proposizione 1.1.1). Poiché, per la definizione precedente,

$$\varphi(v) = \varphi(Q - P) = f(Q) - f(P) \in V'$$

l'immagine di v è determinata.

Proposizione 1.8.1. Se $\mathbb{A}, \mathbb{A}', \mathbb{A}''$ sono spazi affini, allora valgono:

- i) l'applicazione identica $id_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (la cui parte lineare è $\varphi = id_V$) è un isomorfismo affine;
- ii) se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}$ è un isomorfismo;
- iii) se $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A}''$ sono applicazioni affini, allora anche l'applicazione $g \circ f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}''$ è affine. In particolare, la composizione di isomorfismi affini è anch'essa un isomorfismo.

Dimostrazione. *i)* Ovvio.

ii) Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ la parte lineare di f . Dall'ipotesi segue immediatamente che anche f^{-1} è biunivoca e che φ^{-1} è un isomorfismo di K -spazi vettoriali. Basta quindi provare che φ^{-1} è la parte lineare di f^{-1} , cioè che, comunque scelti $P', Q' \in \mathbb{A}'$, vale

$$f^{-1}(Q') - f^{-1}(P') = \varphi^{-1}(Q' - P').$$

Consideriamo i punti $f^{-1}(Q'), f^{-1}(P') \in \mathbb{A}$. Per ipotesi f è una applicazione affine, dunque vale

$$f(f^{-1}(Q')) - f(f^{-1}(P')) = \varphi(f^{-1}(Q') - f^{-1}(P'))$$

da cui

$$Q' - P' = \varphi(f^{-1}(Q') - f^{-1}(P')).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri, si ottiene

$$\varphi^{-1}(Q' - P') = f^{-1}(Q') - f^{-1}(P')$$

come volevamo.

iii) Lasciata al lettore. □

La precedente proposizione implica che l'isomorfismo affine è una relazione di equivalenza tra gli spazi affini su un campo fissato.

Esempio 1.8.2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V e sia $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ una base di V . Scelto $O \in \mathbb{A}$, si consideri il riferimento affine $\Sigma = (O; e_1, \dots, e_n)$. Definiamo l'applicazione

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_K^n \quad \text{data da} \quad P = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n),$$

ovvero quella che ad ogni punto associa la n -upla delle coordinate (rispetto a Σ). Si definisca anche l'applicazione lineare

$$\varphi : V \rightarrow K^n \quad \text{data da} \quad v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

ovvero quella che ad ogni vettore associa la sua n -upla di componenti (rispetto a $\mathcal{B}$).

Proviamo ora che f è un isomorfismo e che φ è la sua parte lineare.

Comunque scelti $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{A}$, dalla Definizione 1.1.5, si ha che

$$P - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{e} \quad Q - O = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

e dunque (per la Definizione 1.1.1)

$$Q - P = (Q - O) - (P - O) = (y_1 - x_1)e_1 + \dots + (y_n - x_n)e_n.$$

Pertanto, $\varphi(Q - P) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) \in K^n$. D'altro canto, $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(Q) = (y_1, \dots, y_n)$. In conclusione

$$f(Q) - f(P) = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n) = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) = \varphi(Q - P)$$

e questo significa che f è una applicazione affine e φ è la sua parte lineare. Si prova facilmente che f è biunivoca; inoltre φ è ovviamente un isomorfismo di spazi vettoriali. Dunque f è un isomorfismo affine (non canonico, in quanto dipende dalla scelta del riferimento Σ).

Osservazione 1.8.3. Dall'esempio precedente segue che ogni spazio affine di dimensione n su K è isomorfo (non canonicamente) ad $\mathbb{A}_K^n$.

Definizione 1.8.2. Un isomorfismo affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$ in sé si dice *affinità* di $\mathbb{A}$.

È chiaro che se f è una affinità di $\mathbb{A}$, spazio affine su V , allora la parte lineare di f è un automorfismo φ di V , cioè $\varphi \in GL(V)$.

Il seguente risultato mostra che un'affinità è individuata dalla sua parte lineare e dall'immagine di un punto fissato.

Teorema 1.8.2 (Determinazione di un'affinità). *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e siano dati due punti $O, O' \in \mathbb{A}$ e $\varphi \in GL(V)$. Allora esiste un'unica affinità $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che $f(O) = O'$ e φ sia la parte lineare di f .*

Dimostrazione. Si definisca, per ogni $P \in \mathbb{A}$,

$$f(P) := O' + \varphi(P - O).$$

Di conseguenza si ha $f(O) = O' + \varphi(O - O) = O' + \varphi(0_V) = O' + 0_V = O'$. Resta dunque solo da provare che φ è la parte lineare di f , cioè che, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$, si ha $f(Q) - f(P) = \varphi(Q - P)$.

A tale scopo calcoliamo

$$f(Q) - f(P) = (f(Q) - O') - (f(P) - O') = \varphi(Q - O) - \varphi(P - O),$$

dove la prima uguaglianza segue dalla Relazione di Chasles (vedi Definizione 1.1.1) e la seconda dalla definizione di f . Essendo φ una applicazione lineare si ha inoltre che

$$\varphi(Q - O) - \varphi(P - O) = \varphi[(Q - O) - (P - O)] = \varphi(Q - P),$$

dove la seconda uguaglianza segue ancora dalla Relazione di Chasles. Questo prova l'esistenza della f richiesta.

Per provarne l'unicità, supponiamo che esista un'affinità g tale che $g(O) = O'$ e che abbia φ come parte lineare.

Dunque deve essere $g(P) = g(O) + \varphi(P - O) = O' + \varphi(P - O)$, per ogni $P \in \mathbb{A}$. Pertanto $g(P) = f(P)$ per ogni $P \in \mathbb{A}$, cioè f e g coincidono. $\square$

1.9 Gruppi di trasformazioni affini

Dalla Proposizione 1.8.1 segue facilmente il seguente fatto fondamentale.

Teorema 1.9.1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine. Allora l'insieme*

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) := \{\text{affinit\`a di } \mathbb{A}\}$$

\`e un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Definizione 1.9.1. I sottogruppi di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ si dicono *gruppi di trasformazioni affini*.

Vediamo ora alcuni gruppi di trasformazioni affini e come un'affinit\`a qualunque si pu\`o fattorizzare come composizione di due affinit\`a pi\`u semplici.

Teorema 1.9.2. *Se $\mathbb{A}$ \`e uno spazio affine su  $V$  allora le traslazioni di  $\mathbb{A}$  sono tutte e sole le affinit\`a aventi come parte lineare id_V .*

Dimostrazione. Si consideri la traslazione lungo v , dove $v \in V$ (vedi Definizione 1.1.4), cio\`e

$$t_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \quad \text{definita da} \quad P \mapsto t_v(P) := P + v.$$

Calcoliamo (la seconda uguaglianza: $\textcircled{A}$)

$$t_v(Q) - t_v(P) = (Q + v) - (P + v) = Q - P = \text{id}_V(Q - P).$$

Pertanto t_v \`e una applicazione affine di parte lineare  $\varphi = \text{id}_V$ . Abbiamo visto in precedenza che  $t_v$  \`e biunivoca e quindi, essendo φ un isomorfismo di spazi vettoriali, \`e un isomorfismo affine. Quindi  $t_v$  \`e un'affinit\`a.

Viceversa, se $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ \`e un'affinit\`a e la sua parte lineare \`e id_V , allora per definizione, comunque scelti $P, Q \in \mathbb{A}$:

$$f(Q) - f(P) = Q - P.$$

Pertanto, posto

$$v := f(Q) - Q = f(P) - P$$

si ha $f = t_v$, come volevamo. $\square$

\`E chiaro dal Teorema precedente e dall'Esercizio A1 che l'insieme di tutte le traslazioni di uno spazio affine  $\mathbb{A}$  \`e un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque un gruppo di trasformazioni affini, detto *sottogruppo delle traslazioni* e denotato con $T(\mathbb{A})$.

Esercizio A7. Provare, se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine sullo spazio vettoriale V , allora i gruppi $T(\mathbb{A})$ e $(V, +)$ sono isomorfi.

Se si fissa un punto $O \in \mathbb{A}$, si verifica facilmente che l'insieme delle affinità che lo fissano

$$\text{Aff}_O(\mathbb{A}) := \{f \in \text{Aff}(\mathbb{A}) \mid f(O) = O\}$$

è un sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{A})$ e dunque è un altro gruppo di trasformazioni affini.

Si osservi poi che ogni $f \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ è individuata solo dalla sua parte lineare φ per il Teorema 1.8.2. Si vede anche direttamente: infatti, nota φ , per ogni $P \in \mathbb{A}$ è determinata

$$f(P) = O + \varphi(P - O).$$

La facile dimostrazione del seguente risultato è lasciata al lettore.

Lemma 1.9.3. *L'applicazione*

$$\Phi_O : \text{Aff}_O(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un isomorfismo di gruppi (le operazioni sono entrambe la composizione di applicazioni).

Più in generale, possiamo definire l'analogia applicazione riguardo ad una qualunque affinità; in altri termini, estendiamo Φ_O a tutto $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Teorema 1.9.4. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Allora l'applicazione*

$$\Phi : \text{Aff}(\mathbb{A}) \longrightarrow GL(V)$$

che associa ad ogni affinità la sua parte lineare è un omomorfismo di gruppi. Inoltre $\ker(\Phi) = T(\mathbb{A})$, che è dunque un sottogruppo normale di $\text{Aff}(\mathbb{A})$.

Dimostrazione. Bisogna provare che, comunque scelte $f, g \in \text{Aff}(\mathbb{A})$, poste $\varphi = \Phi(f)$ e $\psi = \Phi(g)$ le rispettive parti lineari allora si ha

$$\Phi(f \circ g) = \varphi \circ \psi.$$

Per la Definizione 1.8.1, questo equivale a provare che, per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ si verifica

$$(f \circ g)(Q) - (f \circ g)(P) = (\varphi \circ \psi)(Q - P).$$

Poiché f ha come parte lineare φ e g ha come parte lineare ψ , si ottengono le uguaglianze

$$f(g(Q)) - f(g(P)) = \varphi(g(Q) - g(P)) = \varphi(\psi(Q - P)),$$

come si voleva. Inoltre $\ker(\Phi)$ è costituito da tutte e sole le affinità con parte lineare identica e tale insieme è esattamente $T(\mathbb{A})$ per il Teorema 1.9.2. $\square$

Ricordiamo la seguente nozione di Algebra Lineare.

Definizione 1.9.2. Se V è un K -spazio vettoriale e $c \in K$, si dice *omotetia di rapporto c* l'applicazione lineare

$$\omega_c : V \rightarrow V \quad \text{definita da} \quad \omega_c(v) = cv, \quad \forall v \in V.$$

Chiaramente ω_c è un isomorfismo di K -spazi vettoriali se e solo se $c \neq 0$ (altrimenti è l'omomorfismo nullo) e la sua matrice associata (su qualunque base) è $c\mathbb{I}_n$, ove $n = \dim(V)$.

Esercizio A8. Provare che l'insieme $\{\omega_c \mid c \neq 0\}$ è un sottogruppo di $GL(V)$ e inoltre è isomorfo al gruppo moltiplicativo $(K^*, \cdot)$.

La nozione di omotetia può essere riletta nell'ambito della Geometria Affine attraverso l'isomorfismo Φ_O come segue.

Definizione 1.9.3. Con le notazioni precedenti, se $c \in K^*$ e $O \in \mathbb{A}$, diciamo *omotetia di rapporto c e centro O* l'affinità

$$\omega_{c,O} := \Phi_O^{-1}(\omega_c)$$

cioè

$$\omega_{c,O} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{dove} \quad \omega_{c,O}(P) = O + c(P - O).$$

In particolare, se $c = -1$, l'affinità $\omega_{-1,O}$ si dice *simmetria di centro O* e si denota anche con σ_O .

Teorema 1.9.5 (Fattorizzazione di un'affinità). *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e sia $O \in \mathbb{A}$ un punto fissato. Allora per ogni $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$*

- i) *esistono e sono unici $v \in V$ e $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = g \circ t_v$;*
- ii) *esistono e sono unici $w \in V$ e $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$ tali che $f = t_w \circ h$.*

Dimostrazione. i) Definiamo il vettore $v := O - f^{-1}(O)$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_v . Questa è biunivoca e ha per inversa $t_v^{-1} = t_{-v}$. Poiché $\text{Aff}(\mathbb{A})$ è un gruppo, la composizione di affinità è ancora un'affinità; pertanto definiamo l'affinità

$$g := f \circ t_v^{-1}.$$

Resta solo da provare che $g \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $g(O) = O$. Dalla definizione

$$g(O) = f(t_v^{-1}(O)) = f(t_{-v}(O)) = f(O - v) = f(f^{-1}(O)) = O,$$

come volevamo.

ii) Definiamo il vettore $w := f(O) - O$ e consideriamo la corrispondente traslazione t_w . Come prima, possiamo definire l'affinità

$$h := t_w^{-1} \circ f.$$

Resta solo da provare che $h \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$, cioè che $h(O) = O$. Dalla definizione

$$h(O) = t_w^{-1}(f(O)) = t_w^{-1}(O + w) = t_w^{-1}(t_w(O)) = O,$$

come volevamo. □

1.10 Equazioni di affinità e cambi di riferimento

Vediamo ora come esprimere esplicitamente un'affinità. Per fare questo, bisogna fissare due sistemi di riferimento affine (che supponiamo lo stesso per semplicità) nel dominio e nel codominio dell'affinità.

Come abbiamo visto nel Teorema 1.8.2, ogni affinità è determinata dalla sua parte lineare e dall'immagine di un punto fissato.

Si consideri dunque l'unica affinità $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che $f(O) = O'$ (dove O e O' sono due punti fissati di $\mathbb{A}$) e avente $\varphi \in GL(V)$ come parte lineare. Come visto nella dimostrazione del Teorema 1.8.2, tale affinità è definita da

$$f(P) = O' + \varphi(P - O). \quad (1.6)$$

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base di V e si consideri il riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{A}$. Rispetto ad esso, le coordinate del punto O sono ovviamente $(0, \dots, 0)$ e si denotino con $(c_1, \dots, c_n)$ le coordinate di O' . Inoltre siano $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ le coordinate del generico punto $P \in \mathbb{A}$ e della sua immagine $f(P)$, rispettivamente.

Infine si osservi che $P - O$ è il vettore di V di componenti $(x_1, \dots, x_n)$ sulla base fissata $\mathcal{B}$ e quindi $\varphi(P - O)$ si può esprimere come prodotto della matrice $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ per la matrice colonna ${}^t(x_1, \dots, x_n)$.

Pertanto l'espressione (1.6) diventa esplicitamente

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cioè, avendo posto $Y := {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $X := {}^t(x_1, \dots, x_n)$ e $C := {}^t(c_1, \dots, c_n)$,

$$Y = MX + C. \quad (1.7)$$

Ponendo $M = (m_{ij})$, tale relazione, espressa scalarmente, diventa

$$\begin{cases} y_1 &= m_{11}x_1 + \dots + m_{1n}x_n &+ c_1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_n &= m_{n1}x_1 + \dots + m_{nn}x_n &+ c_n \end{cases} \quad (1.8)$$

Definizione 1.10.1. Le espressioni (1.7) e (1.8) sono dette, rispettivamente, *equazione vettoriale dell'affinità* e *equazione scalare dell'affinità*.

Esempio 1.10.1. L'affinità f di $\mathbb{A}^2$ di equazione vettoriale $Y = MX + C$, dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ha equazione scalare

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - 3x_2 - 2 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 + 5 \end{cases}.$$

Vediamo, nelle seguenti classi di esempi, alcuni casi particolari.

Esempio 1.10.2. Si consideri un'affinità f di equazione (1.7).

- (a) $M = \mathbb{I}_n$ se e solo se f è una traslazione. In tal caso, $f = t_v$ dove $v = (c_1, \dots, c_n)$;
- (b) $C = 0_{\mathbb{K}^n}$ se e solo se $O = O'$ se e solo se $f \in \text{Aff}_O(\mathbb{A})$;
- (c) $C = 0_{\mathbb{K}^n}$ e $M = -\mathbb{I}_n$: in tal caso $f = \sigma_O$, simmetria di centro O .

Esercizio A9. Determinare le equazioni vettoriali e scalari di σ_O .

Se $B \in \mathbb{A}$ è un qualunque punto, definire la *simmetria di centro B* dandone le equazioni vettoriali e scalari.

Si può dare una forma ancora più compatta dell'equazione (1.7) di un'affinità. Osserviamo che i dati della matrice $M \in K^{n,n}$ e del vettore $C \in K^n$ possono essere inseriti in una matrice $(n+1) \times (n+1)$ nei seguenti due modi.

I) Siano $\bar{X} := {}^t(1, x_1, \dots, x_n)$ e $\bar{Y} := {}^t(1, y_1, \dots, y_n)$ e sia

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & M & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (1.7) è equivalente a

$$\bar{Y} = Q \bar{X}. \quad (1.9)$$

II) Siano $\tilde{X} := {}^t(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $\tilde{Y} := {}^t(y_1, \dots, y_n, 1)$ e sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} & & c_1 \\ & M & \vdots \\ & & c_n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora l'equazione (1.7) è equivalente a

$$\tilde{Y} = \tilde{Q} \tilde{X}. \quad (1.10)$$

Ognuna delle espressioni (1.9) e (1.10) è detta *equazione matriciale dell'affinità*.

Esempio 1.10.3. L'affinità f di $\mathbb{A}^2$ data nell'Esempio 1.10.1 ha equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora il seguente problema: se in uno spazio affine $\mathbb{A}$ sono dati due sistemi di riferimento affine (vedi Definizione 1.1.5), come variano le coordinate di un punto rispetto ai due riferimenti? Vedremo che la risposta a tale domanda è legata alle equazioni di una affinità.

Sia dunque $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale V . Siano $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ due basi di V e $O, O' \in \mathbb{A}$. Indichiamo con $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ i corrispondenti riferimenti affini. Se un punto $P \in \mathbb{A}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ rispetto a Σ' , quale legame c'è tra le due n -uple di coordinate?

Per definizione di sistema di riferimento affine, si ha

$$P - O = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad P - O' = y_1 e'_1 + \dots + y_n e'_n.$$

Inoltre, dalla Relazione di Chasles si ha l'uguaglianza tra vettori di V :

$$P - O' = (P - O) + (O - O') \quad (1.11)$$

da cui segue l'uguaglianza delle componenti di ambo i membri sulla base $\mathcal{B}'$. Ponendo

$$O - O' := c_1 e'_1 + \dots + c_n e'_n$$

restano da individuare le componenti di $P - O$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Ricordiamo, dall'Algebra lineare, che il cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ nello spazio vettoriale V è individuato da (e individua univocamente) una matrice $n \times n$

$$A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)$$

le cui colonne sono, ordinatamente, le componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, dei vettori della base $\mathcal{B}$. Esplicitamente, ponendo $A = (a_{ij})$, si ha

$$\begin{cases} e_1 &= a_{11}e'_1 + \dots + a_{n1}e'_n \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ e_n &= a_{1n}e'_1 + \dots + a_{nn}e'_n \end{cases}.$$

È noto inoltre, che se un vettore $v \in V$ ha componenti $(x_1, \dots, x_n)$ sulla base $\mathcal{B}$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ sulla base $\mathcal{B}'$, cioè

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n$$

allora, posti $X := {}^t(x_1, \dots, x_n)$ e $X' := {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$ si ha

$$X' = AX. \quad (1.12)$$

In questo contesto, $v = P - O$, quindi l'uguaglianza delle componenti di ambo i membri di (1.11) sulla base $\mathcal{B}'$ diventa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

e quindi, usando (1.12),

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque provato il seguente risultato

Teorema 1.10.1. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due sistemi di riferimento affine di $\mathbb{A}$ e siano $(c_1, \dots, c_n)$ le coordinate del punto O nel riferimento Σ' . Se un punto $P \in \mathbb{A}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ rispetto a Σ' , allora, posti*

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

□

È evidente che la precedente espressione del *cambio di coordinate affini* è dello stesso tipo dell'equazione vettoriale di una affinità.

1.11 Proprietà affini

Intendiamo con *proprietà affini* quelle proprietà (nozioni, relazioni, ecc.) che vengono mantenute attraverso un'affinità. In sintesi, in questo paragrafo vedremo che si conservano per affinità:

- essere un sottospazio affine;
- la dimensione di un sottospazio affine;
- essere un insieme di punti allineati;
- essere sottospazi paralleli.

In questa sezione $\mathbb{A}$ denota uno spazio affine su un K -spazio vettoriale V con $n = \dim(\mathbb{A}) = \dim_K(V)$. In alcuni teoremi considereremo, per semplicità, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_K^n$ e $V = K^n$: abbiamo visto (cfr. Osservazione 1.8.3) che non è restrittivo supporlo.

Proposizione 1.11.1. *Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Se $S = P + W \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine di giacitura W e passante per il punto P , allora*

$$f(S) = f(P) + \varphi(W)$$

è il sottospazio affine di giacitura $\varphi(W)$ e passante per il punto $f(P)$.

Dimostrazione. “ $\subseteq$ ” Sia $Q \in S$ cioè $Q = P + w$ per un opportuno $w \in W$. Dunque $w = Q - P$ e, per la Definizione 1.8.1, si ha $\varphi(w) = f(Q) - f(P)$. Poiché $\varphi(w) \in \varphi(W)$, si conclude che $f(Q) = f(P) + \varphi(w) \in f(P) + \varphi(W)$, come si voleva.

“ $\supseteq$ ” Sia $R \in f(P) + \varphi(W)$ cioè $R = f(P) + \varphi(w)$ per un opportuno $w \in W$. Per l'assioma SA1 (vedi Definizione 1.1.1) esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $w = Q - P$. Quindi, per la citata definizione di affinità, $\varphi(w) = f(Q) - f(P)$. In conclusione

$$R = f(P) + \varphi(w) = f(P) + (f(Q) - f(P)) = f(Q)$$

e $Q = P + w \in P + W = S$, come volevamo. □

Corollario 1.11.2. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine con $\dim(S) = s$ allora $f(S) \subseteq \mathbb{A}$ è un sottospazio affine di dimensione s .*

Dimostrazione. Dalla Proposizione precedente si ha che la giacitura di S e quella di $f(S)$ sono sottospazi di V che risultano isomorfi tramite la parte lineare di f . □

Corollario 1.11.3. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $\{P_1, \dots, P_m\}$ è un insieme di punti distinti allineati allora anche $\{f(P_1), \dots, f(P_m)\}$ è un insieme di punti distinti allineati. (Si dice sinteticamente che ogni affinità è una collineazione).*

Dimostrazione. Sia L la retta contenente $P_1, \dots, P_m$. Poiché un'applicazione mantiene le inclusioni, si ha che $f(L)$ contiene $f(P_1), \dots, f(P_m)$. Dalla Proposizione 1.11.1 si ha che $f(L)$ è un sottospazio affine e, dal Corollario 1.11.2, segue in particolare che $\dim(f(L)) = 1$. $\square$

Corollario 1.11.4. *Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $S, S' \subseteq \mathbb{A}$ sono due sottospazi affini paralleli allora $f(S)$ e $f(S')$ sono sottospazi affini paralleli.*

Dimostrazione. Se S e S' hanno giaciture, rispettivamente, W e W' , per ipotesi si ha $W \subseteq W'$ (o $W \supseteq W'$). Quindi $\varphi(W) \subseteq \varphi(W')$ (o $\varphi(W) \supseteq \varphi(W')$).

D'altro canto, dalla Proposizione 1.11.1 segue che la giacitura di $f(S)$ è $\varphi(W)$ e quella di $f(S')$ è $\varphi(W')$ e questo conclude la dimostrazione. $\square$

Definizione 1.11.1. Due sottoinsiemi X e X' di $\mathbb{A}$ si dicono *affinemente equivalenti* se esiste un'affinità f di $\mathbb{A}$ tale che $f(X) = X'$.

Abbiamo visto nel Corollario 1.11.2 che due sottospazi affinemente equivalenti hanno la stessa dimensione. Si prova facilmente che vale il viceversa.

Proposizione 1.11.5. *Siano S e S' sottospazi affini di $\mathbb{A}$ con $\dim(S) = \dim(S')$. Allora esiste $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ tale che $f(S) = S'$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $S = P + W$ e $S' = P' + W'$ con $\dim(W) = \dim(W')$. Per un noto risultato di Algebra Lineare, tenendo conto che W e W' sono sottospazi vettoriali di V , esiste un isomorfismo di K -spazi vettoriali $\varphi \in GL(V)$ tale che $\varphi(W) = W'$. Pertanto, per il Teorema 1.8.2 (di determinazione di una affinità), esiste un'affinità f avente φ come parte lineare e tale che $f(P) = P'$. Applicando a tale f la Proposizione 1.11.1, si ottiene

$$f(S) = f(P) + \varphi(W) = P' + W' = S'.$$

$\square$

Nel seguente risultato si utilizza la nozione di punti affinemente indipendenti introdotta nella Definizione 1.4.2.

Teorema 1.11.6 (Determinazione di un'affinità mediante punti). *Siano $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ due $(n+1)$ -uple di punti di $\mathbb{A}^n$ affinemente indipendenti. Allora esiste un'unica affinità f tale che $f(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \dots, n$. In altre parole, tali due $(n+1)$ -uple sono affinemente equivalenti e in modo unico (a meno di permutazioni).*

Dimostrazione. Per ipotesi gli n vettori $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ di K^n sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di K^n . Analogamente lo sono $Q_1 - Q_0, \dots, Q_n - Q_0$. Pertanto esiste un unico isomorfismo φ di K^n in sé tale che $\varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Per il Teorema 1.8.2 esiste un'unica $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ avente φ come parte lineare e tale che $f(P_0) = Q_0$. Precisamente (vedi dimostrazione del teorema citato) tale affinità è definita su ogni $P \in \mathbb{A}^n$ come

$$f(P) = Q_0 + \varphi(P - P_0).$$

Dobbiamo verificare che tale affinità verifica le condizioni richieste. Ma, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$f(P_i) - f(P_0) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$$

da cui segue $f(P_i) = Q_i - Q_0 + f(P_0) = Q_i$, come volevamo.

Infine occorre dimostrare l'unicità di tale affinità, cioè che, se $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n)$ e $g(P_i) = Q_i$, per ogni $i = 0, \dots, n$, allora $g = f$ (traccia: si provi dapprima che g ha la stessa parte lineare di f e si concluda applicando il Teorema 1.8.2 $\square$).

Esercizio A10. Provare che due r -uple di punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}^n$ sono affinemente equivalenti, per ogni $r \leq n + 1$.

Esercizio A11. Provare che se $A, B, C, D \in \mathbb{A}^2$ sono i vertici di un parallelogramma (cioè $B - A = C - D$ e $C - B = D - A$) e $f \in \text{Aff}(\mathbb{A}^2)$, allora $f(A), f(B), f(C), f(D)$ sono anch'essi vertici di un parallelogramma.

Ricordiamo alcune nozioni di Algebra Lineare.

In uno spazio vettoriale V , due sottospazi U e W si dicono *complementari* se $V = U \oplus W$. Equivalentemente, se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo unico come $v = u + w$, per opportuni $u \in U$ e $w \in W$. Si noti anche che, in tal caso, $U \cap W = \{0_V\}$.

Inoltre sono definite due applicazioni lineari, dette *proiezioni*,

$$\pi_1 : V \rightarrow U, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto u$$

e

$$\pi_2 : V \rightarrow W, \quad \text{data da } v = u + w \mapsto w.$$

Vediamo come rileggere queste nozioni nella Geometria affine.

Definizione 1.11.2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine sullo spazio vettoriale $V = U \oplus W$ e sia $S = Q + W$ un sottospazio affine di giacitura W . Diciamo *proiezione su S parallela a U* l'applicazione

$$p_U : \mathbb{A} \longrightarrow S, \quad \text{data da } P \mapsto (P + U) \cap S.$$

In modo del tutto analogo, posto $S' = Q' + U$, si definisce la *proiezione su S' parallela a W* .

Esempio 1.11.1. In $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, spazio affine su $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, dove $U = \langle (1, 0) \rangle$ e $W = \langle (0, 1) \rangle$, posto $S(= W)$ l'asse y , la proiezione su S parallela a U è

$$p_U(x, y) = y.$$

Se invece poniamo $S'(= U)$ l'asse x , la proiezione su S' parallela a W è

$$p_W(x, y) = x.$$

Proposizione 1.11.7. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione p_U è ben definita ed è un'applicazione affine avente π_2 come parte lineare.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.2.4, $(P + U) \cap (Q + W) \neq \emptyset$, in quanto $U + W = V$, e inoltre

$$\dim((P + U) \cap (Q + W)) = \dim_K U + \dim_K W - n = 0.$$

Pertanto p_U è ben definita.

Resta da provare che, comunque scelti $A, B \in \mathbb{A}$, si ha $p_U(B) - p_U(A) = \pi_2(B - A)$. Tale verifica è lasciata come esercizio. (Traccia: osservare dapprima che ogni punto $P \in \mathbb{A}$ si può scrivere come $P = Q + v$ per un opportuno $v \in V = U \oplus W$; quindi $P = Q + u + w$. Si dimostri che $p_U(P) = Q + w$...) $\square$

Ora possiamo studiare le equazioni di una proiezione. Per fare questo, conviene introdurre le estensioni delle proiezioni a tutto lo spazio affine. Per semplicità consideriamo lo spazio affine numerico $\mathbb{A}_K^n$ su K^n , con riferimento affine standard $(O, \mathcal{E})$, dove $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di K^n . Non è restrittivo supporre $U = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$ e $W = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle$. Sia infine $S = Q + W$, ove $Q = (q_1, \dots, q_n)$.

Definiamo dunque

$$P_U : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n, \quad \text{data da} \quad P \mapsto (P + U) \cap S.$$

La sua parte lineare è

$$\Pi_2 : K^n = U \oplus W \longrightarrow K^n = U \oplus W, \quad \text{data da} \quad v = u + w \mapsto w.$$

Ovvero

$$\Pi_2 : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (0, \dots, 0, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n).$$

Si osservi che $P_U(Q) = (Q + U) \cap S = Q$, dunque per ogni $P \in \mathbb{A}^n$

$$P_U(P) = Q + \Pi_2(P - Q).$$

Pertanto, se il generico punto $P \in \mathbb{A}^n$ ha coordinate $P = (x_1, \dots, x_n)$ allora

$$P_U : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (q_1, \dots, q_n) + \Pi_2((x_1, \dots, x_n) - (q_1, \dots, q_n))$$

cioè

$$P_U : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (q_1, \dots, q_n) + (0, \dots, 0, x_{r+1} - q_{r+1}, \dots, x_n - q_n)$$

e quindi

$$P_U : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (q_1, \dots, q_r, x_{r+1}, \dots, x_n).$$

1.12 Spazi affini reali

Se il campo K relativo a uno spazio affine è il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, oltre a tutto quanto visto in precedenza, si danno nozioni e risultati ulteriori, possibili in quanto $\mathbb{R}$ è dotato di una relazione d'ordine che lo rende un *campo ordinato*.

Definizione 1.12.1. Se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale V , diremo che $\mathbb{A}$ è uno *spazio affine reale*. In particolare, se $n = \dim(\mathbb{A})$, si può supporre che $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$.

Un primo fatto peculiare di tali spazi è il seguente. Abbiamo menzionato nel paragrafo precedente la nozione di collineazione (cioè di applicazione biunivoca $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che, per ogni retta $L \subset \mathbb{A}$ anche $f(L)$ è una retta) e abbiamo provato che ogni affinità è una collineazione (vedi Corollario 1.11.3). Nel caso degli spazi affini reali di dimensione almeno 2 vale anche il viceversa (non proveremo questo risultato).

Introduciamo ora alcune nozioni specifiche degli spazi affini reali e vediamo quali di queste si mantengono per affinità.

D'ora in poi, in questo paragrafo, con $\mathbb{A}$ denoteremo uno spazio affine reale su un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale V .

Definizione 1.12.2. La *semiretta di origine* $Q \in \mathbb{A}$ e *direzioni* $v \in V \setminus \{0_V\}$ è l'insieme

$$\{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + tv, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Chiaramente tale semiretta è contenuta nella retta $Q + \langle v \rangle$.

Si prova facilmente che l'immagine per affinità di una semiretta è ancora una semiretta. La dimostrazione è analoga a quella della seguente Proposizione 1.12.1.

Definizione 1.12.3. Diciamo *segmento di estremi* $Q, R \in \mathbb{A}$ l'insieme

$$\overline{QR} := \{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + t(R - Q), t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Esercizio A12. Provare che $\overline{QR} = \overline{RQ}$.

Esercizio A13. È vero che $\overline{QR}$ si può scrivere anche come $\{P \in \mathbb{A} \mid P = Q + t(Q - R), t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$? In caso negativo, esibire un controesempio numerico.

Proposizione 1.12.1. *Sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $Q, R \in \mathbb{A}$ siano due punti qualunque. Allora $f(\overline{QR}) = \overline{f(Q)f(R)}$. In altre parole, l'immagine per affinità di un segmento è ancora un segmento, avente per estremi le immagini degli estremi del segmento di partenza.*

Dimostrazione. “ $\subseteq$ ” Si denoti con $\varphi \in GL(V)$ la parte lineare di f . Se $P \in \overline{QR}$ allora $P = Q + t(R - Q)$ per un opportuno $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$. Dunque $P - Q = t(R - Q) \in V$ ed essendo φ lineare si ha

$$\varphi(P - Q) = t\varphi(R - Q).$$

D'altro canto, essendo f un'affinità di parte lineare φ , si ha

$$f(P) - f(Q) = \varphi(P - Q).$$

Dalle due precedenti relazioni si ottiene immediatamente che

$$f(P) - f(Q) = t\varphi(R - Q) = t(f(R) - f(Q))$$

e quindi

$$f(P) = f(Q) + t(f(R) - f(Q))$$

cioè $f(P) \in \overline{f(Q)f(R)}$. Quindi la prima inclusione è dimostrata.

“ $\supseteq$ ” Basta applicare l'inclusione appena dimostrata all'affinità f^{-1} e al segmento di estremi $f(R)$ e $f(Q)$, ottenendo che

$$f^{-1}(\overline{f(Q)f(R)}) \subseteq \overline{f^{-1}(f(Q))f^{-1}(f(R))} = \overline{QR}.$$

Applicando infine f ad ambo i membri si ottiene la tesi. $\square$

Si può definire il *punto medio* di un segmento $\overline{QR}$ (anche se il termine non ha alcuna valenza metrica, che assumerà invece negli spazi euclidei!) quel punto M definito da

$$M := Q + \frac{1}{2}(R - Q)$$

Esercizio A14. Provare che il punto medio M del segmento $\overline{QR}$ verifica le uguaglianze vettoriali

$$(M - Q) + (R - M) = R - Q \quad \text{e} \quad M - Q = R - M.$$

Esercizio A15. Provare che il punto medio M di un segmento $\overline{QR}$ viene preservato dalle affinità, cioè che, se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ allora $f(M)$ è il punto medio del segmento $f(\overline{QR})$.

La naturale generalizzazione della nozione di segmento a una “dimensione” maggiore è la seguente.

Definizione 1.12.4. Se $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, diciamo *triangolo di vertici A, B, C* l'insieme

$$\overline{ABC} := \{P \in \mathbb{A} \mid P = A + t(B - A) + u(C - A), t, u \in \mathbb{R}_+, t + u \leq 1\}$$

dove $\mathbb{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi.

In modo analogo a quanto visto nella Proposizione 1.12.1, si prova il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.12.2. Se $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ e $A, B, C \in \mathbb{A}$ sono tre punti non allineati, allora $f(\overline{ABC}) = \overline{f(A)f(B)f(C)}$. In altre parole, l'immagine per affinità di un triangolo è ancora un triangolo, avente per vertici le immagini dei vertici del triangolo di partenza.

Si possono generalizzare le nozioni di segmento (con 2 estremi) e di triangolo (con 3 vertici) a un oggetto determinato da un insieme (sufficientemente generale) di punti. Si definisce infatti *k-simplex* di vertici $A_0, \dots, A_k$ (dove tali punti sono affinemente indipendenti e dunque necessariamente $k \leq n$) l'insieme

$$\left\{ P \in \mathbb{A} \mid P = A_0 + \sum_{i=1}^k t_i(A_i - A_0), t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k t_i \leq 1 \right\}.$$

Un'altra nozione tipica degli spazi affini reali è quella di convessità.

Definizione 1.12.5. Un insieme $X \subseteq \mathbb{A}$ si dice *convesso* se, comunque scelti $A, B \in X$, il segmento di estremi A e B è contenuto in X .

Esercizio A16. Provare che un segmento è convesso.

Esercizio A17. Provare che un triangolo è convesso.

Osservazione 1.12.1. L'unione di due sottospazi affini $L, M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ è convessa se e solo se $L \subset M$ oppure $M \subset L$ (A).

La convessità è una proprietà affine, come provato nel seguente risultato.

Teorema 1.12.3. Sia $X \subseteq \mathbb{A}$ un insieme convesso e sia $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$. Allora $f(X)$ è convesso.

Dimostrazione. Siano $f(A), f(B) \in f(X)$ due punti qualunque. Vogliamo provare che

$$\overline{f(A)f(B)} \subseteq f(X).$$

Poiché $A, B \in X$ e X è convesso per ipotesi, allora $\overline{AB} \subseteq X$. Pertanto $f(\overline{AB}) \subseteq f(X)$. Ma, per la Proposizione 1.12.1, si ha

$$f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$$

e dunque la tesi. □

Appendice - Cenni sul rango di una matrice

Sia K un campo e $A \in K^{m,n}$ una matrice $m \times n$.

Definizione 1.12.6. Se $p \leq \min\{m, n\}$, si dice *minore di ordine p di A* una sua sottomatrice $p \times p$ ottenuta intersecando p righe e p colonne di A .

Un minore M di ordine p di A si dice *degenere* se $\det(M) = 0$. Altrimenti si dice *non degenere*.

Definizione 1.12.7. Se M è un minore di ordine p di A si dice *minore orlato di M* un minore di A di ordine $p + 1$ che contiene M .

Esempio 1.12.1. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Un minore di ordine 2 di A è

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

I suoi minori orlati sono 2, e precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Un altro minore di ordine 2 di A è

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

I suoi minori orlati sono 2, e precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le seguenti “definizioni” equivalenti possono essere usate, in modo opportuno, per determinare il rango di una matrice.

Proposizione 1.12.4. Se $A \in K^{m,n}$, i seguenti numeri interi sono uguali e tale numero è detto rango di A .

- Il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti.
- Il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.
- Il numero dei pivot di una matrice ridotta (a scalini) ottenuta da A mediante riduzione per righe.
- Il massimo ordine di un minore non degenere di A .
- L'ordine di un minore non degenere i cui minori orlati sono tutti degeneri (vedi Teorema degli orlati).

Capitolo 2

GEOMETRIA EUCLIDEA

2.1 Spazi vettoriali euclidei

Riprendiamo alcune nozioni di Algebra Lineare sugli spazi vettoriali euclidei. Dovremo distinguere i due casi: quello reale e quello complesso.

Definizione 2.1.1. Sia V un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Una *forma bilineare simmetrica* su V è una applicazione

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove l'immagine di una coppia ordinata (v, w) si denota con $\langle v, w \rangle$, che verifica le seguenti proprietà:

i) bilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;
- $\forall w \in V$, l'applicazione $\langle -, w \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare;

ii) simmetria, cioè $\forall v, w \in V$, vale $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Infine, tale forma bilineare si dice *definita positiva* o *prodotto scalare reale* se $\forall v \in V$, si ha $\langle v, v \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale reale euclideo* o un $\mathbb{R}$ - *spazio vettoriale euclideo*.

In modo analogo, ma con i dovuti adattamenti, vediamo la corrispondente nozione relativa ai numeri complessi.

Utilizzeremo le seguenti notazioni: se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, denotiamo il suo coniugato $a - ib$ con $\bar{z}$ e il suo modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$ con $|z|$. Chiaramente, se $z \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide col valore assoluto.

Definizione 2.1.2. Sia V un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Una *forma sesquilineare hermitiana* su V è una applicazione

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

che verifica le seguenti proprietà:

i) sesquilinearità, cioè

- $\forall v \in V$, l'applicazione $\langle v, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ è additiva e verifica

$$\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle,$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $w \in V$;

- $\forall w \in V$, l'applicazione $\langle -, w \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare;

ii) simmetria coniugata, cioè $\forall v, w \in V$, vale $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$.

Infine, tale forma si dice *definita positiva* o *prodotto hermitiano complesso* se $\forall v \in V$, si ha $\langle v, v \rangle \geq 0$ e inoltre $\langle v, v \rangle = 0$ se e solo se $v = 0_V$.

In questo caso, diciamo che V è uno *spazio vettoriale complesso euclideo* o un $\mathbb{C}$ - *spazio vettoriale euclideo*.

Si osservi che la richiesta $\langle v, v \rangle \geq 0$ ha senso in quanto, per la simmetria coniugata, $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$, dunque $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.

Ricordiamo inoltre che, come accade per le applicazioni lineari, anche alle forme bilineari si può associare una matrice, una volta che si è fissata una base per lo spazio vettoriale. Infatti, se V è un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una sua base, a ogni forma bilineare

$$\tau : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

si associa la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\tau) := (\tau(v_i, v_j))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Viceversa, a una matrice $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ si associa, rispetto a $\mathcal{B}$, la forma bilineare definita, su una qualunque coppia di vettori $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e $w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$, da:

$$\tau(v, w) := \sum_{i,j=1}^n m_{ij} a_i b_j.$$

Associando ad ogni vettore v la matrice colonna $a := {}^t(a_1, \dots, a_n)$ delle sue componenti rispetto alla base scelta, e analogamente a w la matrice colonna $b := {}^t(b_1, \dots, b_n)$, l'uguaglianza precedente si scrive sinteticamente come

$$\tau(v, w) = {}^t a M b.$$

È noto, inoltre, che τ è una forma bilineare simmetrica se e solo se $M = M_{\mathcal{B}}(\tau)$ è una matrice simmetrica (cioè tale che ${}^tM = M$).

In particolare, se V è uno spazio vettoriale reale euclideo, si associa al prodotto scalare, rispetto a una base fissata $\mathcal{B}$, una matrice M simmetrica reale definita positiva che verifica

$$\langle v, w \rangle = {}^t_a M b.$$

e viceversa.

Esempio 2.1.1. Se $V = \mathbb{R}^n$, il *prodotto scalare standard* è quello associato alla matrice identica rispetto alla base canonica.

Pertanto, se $v = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ e $w = {}^t(b_1, \dots, b_n)$, allora

$$\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

In modo analogo si prova la corrispondenza tra un prodotto hermitiano complesso in un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale euclideo e una matrice $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ hermitiana (cioè tale che ${}^tM = \overline{M}$) definita positiva, data da

$$\langle v, w \rangle = {}^t v M \overline{w}.$$

Ricordiamo un risultato fondamentale, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.1.1. *Se V è un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo, comunque scelti $v, w \in V$, vale*

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Definizione 2.1.3. Se V è un $\mathbb{R}$ (rispettivamente, $\mathbb{C}$)-spazio vettoriale euclideo, diciamo *norma* di $v \in V$ il numero reale non negativo

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Con tale nozione, possiamo riscrivere il risultato precedente nella sua formulazione più generale (che vale anche sui numeri complessi).

Teorema 2.1.2 (Disuguaglianza di Schwarz). *Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio E1. Sia V un spazio vettoriale euclideo reale o complesso. Provare che, per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente, $\mathbb{C}$) valgono le seguenti proprietà:

- a) $\|v\| \geq 0$ (qui 0 denota $0_{\mathbb{R}}$);
- b) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;
- c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

Dalla Disuguaglianza di Schwarz discende un'altra nota relazione.

Teorema 2.1.3 (Disuguaglianza triangolare). *Se V è un spazio vettoriale euclideo reale o complesso, comunque scelti $v, w \in V$, si ha*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza allora v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio E2. Provare che, se V è uno spazio vettoriale euclideo *reale*, vale un parziale viceversa dell'ultima affermazione, cioè se $w = \lambda v$, dove $\lambda \in \mathbb{R}_+$, allora $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$. Cercare un controesempio se $\lambda < 0$.

In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di ortogonalità fra vettori e, di conseguenza, anche fra sottospazi vettoriali.

Definizione 2.1.4. Diciamo che due vettori $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w \rangle = 0$.

Osservazione 2.1.1. Si noti che in uno spazio vettoriale euclideo reale vale

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle.$$

Dunque, se v e w sono ortogonali si ha

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

cioè il Teorema di Pitagora, che dunque vale in un qualunque spazio vettoriale euclideo.

In uno spazio vettoriale euclideo si rivela essenziale la nozione di *base ortonormale*, cioè di una base costituita da vettori di norma 1 e a due a due ortogonali. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Inoltre ogni cambiamento di base tra basi ortonormali è associato a una matrice ortogonale M (cioè tale che ${}^t M = M^{-1}$), nel caso reale. Mentre nel caso complesso M è unitaria (cioè tale che ${}^t \overline{M} = M^{-1}$).

Infine ricordiamo la seguente nozione

Definizione 2.1.5. Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Diciamo *complemento ortogonale di W* l'insieme

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

Il nome di “complemento ortogonale” è giustificato dalle seguenti proprietà, le cui dimostrazioni sono già state viste nel corso di Algebra Lineare.

Proposizione 2.1.4. *Sia W un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V . Allora valgono i seguenti fatti:*

- i) $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V ;
- ii) $W^\perp \cap W = \{0_V\}$;
- iii) $W^\perp + W = V$.

In particolare, la somma $W^\perp + W$ è diretta e si denota dunque con $W^\perp \oplus W$. Conseguentemente, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$.

Esercizio E3. Se W_1 e W_2 sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale euclideo V , provare che

$$W_1 \subseteq W_2^\perp \iff W_2 \subseteq W_1^\perp.$$

Pertanto è naturale dire che due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 di uno spazio vettoriale euclideo V sono *ortogonali* se $W_1 \subseteq W_2^\perp$ oppure $W_2 \subseteq W_1^\perp$.

Osservazione 2.1.2. Chiaramente, per la Proposizione precedente, W_1 e W_2 possono essere ortogonali solo se $\dim(W_1) + \dim(W_2) \leq \dim(V)$.

Esempio 2.1.2. Sia W un iperpiano dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard. La sua equazione cartesiana è del tipo

$$W : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Ovviamente il vettore $(a_1, \dots, a_n) \in W^\perp$. D'altro canto, $\dim(W) = n - 1$ dunque $\dim(W^\perp) = 1$. Pertanto $W^\perp$ è la retta vettoriale $\langle (a_1, \dots, a_n) \rangle$.

Concludiamo il paragrafo con una nozione relativa solo al caso reale.

Definizione 2.1.6. Siano v, w due vettori non nulli di un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo V . Si dice *angolo convesso tra v e w* l'unico angolo θ , con $0 \leq \theta \leq \pi$ tale che

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Si noti che, per la Disuguaglianza di Schwarz, tale frazione è compresa tra -1 e 1 . Si osservi infine che, se v e w sono proporzionali, cioè se $w = \lambda v$, allora

$$\cos \theta = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\|v\| \|\lambda v\|} = \frac{\lambda \|v\|^2}{|\lambda| \|v\|^2} = \pm 1$$

dove $\cos \theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \lambda > 0$, $\cos \theta = -1 \iff \theta = \pi \iff \lambda < 0$.

2.2 Spazi affini euclidei

Introduciamo ora un nuovo ambiente geometrico relativamente ai due casi, reale e complesso, anche se focalizzeremo il seguente studio sul primo caso.

Definizione 2.2.1. Se V è uno spazio vettoriale reale (rispettivamente, complesso) euclideo, diciamo *spazio affine euclideo* (rispettivamente, *unitario*) lo spazio affine $\mathbb{A}(V)$ su V che verrà denotato con $\mathbb{E}$. I sottospazi affini di $\mathbb{E}$ sono detti suoi *sottospazi euclidei* (rispettivamente, *unitari*).

In particolare, se $V = \mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard, il corrispondente *spazio affine euclideo canonico* si denota con $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ (se $V = \mathbb{C}^n$, il corrispondente *spazio affine unitario canonico* si denota $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n$).

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire l'ortogonalità e gli angoli tra sottospazi euclidei (resp. unitari).

Definizione 2.2.2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario) e $S, T \subseteq \mathbb{E}$ due suoi sottospazi euclidei (rispettivamente, unitari) di dimensione ≥ 1 . Diciamo che S e T sono *ortogonali* se lo sono le rispettive giaciture come sottospazi di V e scriveremo $S \perp T$.

Si osservi che, se S e T sono ortogonali in $\mathbb{E}$, con $n = \dim(\mathbb{E})$, allora $\dim(S) + \dim(T) \leq n$ per l'Osservazione 2.1.2.

Per poter fare calcoli, come nel caso affine, occorre introdurre un sistema di riferimento. Ma qui terremo conto che lo spazio vettoriale soggiacente è euclideo.

Definizione 2.2.3. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo sullo spazio vettoriale euclideo V . Si dice *riferimento cartesiano* in $\mathbb{E}$ un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$, dove $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di V .

Esempio 2.2.1. Si consideri un iperpiano H di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ che, rispetto a un fissato riferimento cartesiano, abbia equazione

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

La sua giacitura è $H_0 : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Per definizione, un sottospazio euclideo $S = Q + S_0$ è ortogonale a H se e solo se $\dim(S_0) \geq 1$ e $S_0 \subseteq H_0^\perp$. Ma, per la Proposizione 2.1.4, $H_0^\perp$ è una retta vettoriale e precisamente (vedi Esempio 2.1.2), $H_0^\perp = \langle v \rangle$, dove $v = (a_1, \dots, a_n)$. Dunque S è necessariamente una retta affine di giacitura $S_0 = \langle v \rangle$.

Ad esempio, il piano H e la retta r di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$H : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \quad r : (x_1, x_2, x_3) = (1 + 2t, 2 - 3t, 43 + t)$$

sono ortogonali.

Esempio 2.2.2. Si considerino due rette r e s di $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ aventi come vettori direzionali (rispetto a un riferimento cartesiano) $v_r = (a_1, \dots, a_n)$ e $v_s = (b_1, \dots, b_n)$, rispettivamente. Per definizione, $r \perp s$ se e solo se $\langle v_r \rangle \subseteq \langle v_s \rangle^\perp$ e questo si verifica se e solo se $v_r \perp v_s$ cioè se e solo se

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0.$$

Ad esempio le rette r e s di $\mathbb{E}^2$, dove $r : (x, y) = (2, -3) + \lambda(3, -1)$ e $s : (x, y) = (1, 1) + \lambda(2, 1)$, non sono ortogonali in quanto

$$\langle (3, -1), (2, 1) \rangle = 6 - 1 = 5 \neq 0.$$

Come visto nell'Osservazione 2.1.2, se S e T sono ortogonali in $\mathbb{E}^n$, allora necessariamente $\dim(S) + \dim(T) \leq n$. Volendo estendere tale nozione a sottospazi di dimensione qualunque, partiamo dalla seguente osservazione. Siano $S = P + S_0$ e $T = Q + T_0$ due sottospazi euclidei di giaciture rispettive S_0 e T_0 e denotiamo le rispettive dimensioni con

$$s := \dim(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S_0), \quad t := \dim(T) = \dim_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Se accade che

$$\dim(S) + \dim(T) \geq n \quad \text{cioè} \quad s + t \geq n$$

allora

$$\dim(S_0^\perp) + \dim(T_0^\perp) = (n - s) + (n - t) = 2n - (s + t) \leq n.$$

Questo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 2.2.4. Siano $S = P + S_0$ e $T = Q + T_0$ due sottospazi euclidei di $\mathbb{E}^n$ di giaciture rispettive S_0 e T_0 . Se $\dim(S) + \dim(T) \geq n$, diciamo che S e T sono *perpendicolari* se $S_0^\perp$ e $T_0^\perp$ sono ortogonali.

Esempio 2.2.3. Si considerino i due piani di $\mathbb{E}^3$ di equazioni

$$S : ax + by + cz + d = 0, \quad T : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Per definizione, essi sono perpendicolari se e solo se le rette vettoriali

$$S_0^\perp = \langle (a, b, c) \rangle, \quad T_0^\perp = \langle (a', b', c') \rangle$$

sono ortogonali. E tale condizione equivale a $\langle (a, b, c), (a', b', c') \rangle = 0$, cioè $aa' + bb' + cc' = 0$.

Osservazione 2.2.1. Si vede immediatamente che, se $\dim(S) + \dim(T) = n$, l'ortogonalità equivale alla perpendicolarità. $\textcircled{A}$

Per quanto riguarda l'angolo tra due sottospazi euclidei, ci limiteremo a due classi di esempi: l'angolo fra due rette e quello fra una retta e un iperpiano.

Tenendo presente la Definizione 2.1.6, dove si introduce l'angolo fra due vettori di un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale euclideo (e in questo caso si tratta di un angolo θ tale che $0 \leq \theta \leq \pi$), si noti che due rette individuano due angoli, uno acuto e uno ottuso. Sceglieremo quello acuto, per convenzione. In tal caso, se l'angolo minore tra i due vettori direzionali fosse ottuso, sarà sufficiente considerare il vettore opposto di uno dei due. Dunque introduciamo la seguente nozione.

Definizione 2.2.5. Siano r e s due rette nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n$ di vettori direzionali rispettivi v_r e v_s . Si dice *angolo fra le rette r e s* , e si denota con $\widehat{rs}$, l'unico angolo $\theta \in [0, \pi/2]$ tale che

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Si osservi che, nella definizione precedente, $0 \leq \cos \theta \leq 1$ e dunque $\widehat{rs}$ è un angolo acuto. Inoltre è chiaro che $r \perp s$ se e solo se $\widehat{rs} = \pi/2$.

Osservazione 2.2.2. Si noti che l'angolo fra due rette, come accadeva con l'ortogonalità, non ha nulla a che vedere con l'incidenza delle due rette: infatti lo si può definire e calcolare sia nel caso in cui le rette siano incidenti, sia nel caso in cui siano sghembe.

Definizione 2.2.6. Siano r una retta e H un iperpiano nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n$; sia inoltre t una retta ortogonale a H . Si dice *angolo fra r e H* , e si denota con $\widehat{rH}$, l'unico angolo α complementare dell'angolo $\widehat{rt}$. In altre parole, posti v_r e n due vettori direzionali di r e t , rispettivamente,

$$\widehat{rH} := \pi/2 - \widehat{rt}$$

ove $\widehat{rt}$ è l'unico angolo (tra 0 e $\pi/2$) tale che

$$\cos \widehat{rt} = \frac{|\langle v_r, n \rangle|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

Si osservi che anche $\widehat{rH}$ è un angolo acuto.

2.3 Distanze negli spazi affini euclidei

Grazie al prodotto scalare su V , è possibile definire anche una “distanza” in $\mathbb{E}$, rendendolo uno *spazio metrico* e, di conseguenza, uno *spazio topologico*.

Definizione 2.3.1. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $P, Q \in \mathbb{E}$, diciamo *distanza tra P e Q* il numero reale non negativo

$$d(P, Q) := \|Q - P\|.$$

Proposizione 2.3.1. Se $P, Q, R \in \mathbb{E}$ allora:

- i) $d(P, Q) \geq 0$ e vale $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
- ii) $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- iii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Dimostrazione. (i) e (ii) sono lasciate per esercizio, in quanto immediate.
(iii) Per la Relazione di Chasles si ha $Q - P = (Q - R) + (R - P)$, dunque

$$\|Q - P\| = \|(Q - R) + (R - P)\| \leq \|Q - R\| + \|R - P\|,$$

dove la disuguaglianza segue da Teorema 2.1.3. □

Più in generale, diamo la seguente nozione.

Definizione 2.3.2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo (rispettivamente, unitario). Se $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ sono due sottoinsiemi non vuoti, diciamo *distanza tra X e Y* il numero reale non negativo

$$d(X, Y) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in X, Q \in Y\}.$$

Si osservi che tale estremo inferiore esiste in quanto l'insieme su cui si calcola è costituito da numeri reali maggiori o uguali di zero.

Per i sottospazi euclidei vale il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione; ne vedremo un caso particolare nel prossimo Teorema 2.3.5.

Teorema 2.3.2. In uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ sullo spazio vettoriale euclideo V , si considerino due sottospazi euclidei $X = A + U$ e $Y = B + W$, dove $A, B \in \mathbb{E}$ e U, W sono sottospazi vettoriali di V . Allora esistono $P_0 \in X$ e $Q_0 \in Y$ tali che il vettore $Q_0 - P_0$ è ortogonale sia a U che a W e, per ogni $P \in X$ e $Q \in Y$, si ha $\|Q_0 - P_0\| \leq \|Q - P\|$. Pertanto $d(X, Y) = d(P_0, Q_0)$.

Esercizio E4. Siano $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ due sottoinsiemi. Provare che $X \cap Y \neq \emptyset$ implica $d(X, Y) = 0$.

Si può provare che il viceversa, falso in generale, vale ad esempio se X e Y sono due sottospazi euclidei.

In quanto segue considereremo come ambiente lo spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ con un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$.

In tale ambito, diamo la seguente nozione.

Definizione 2.3.3. Se $A, B \in \mathbb{E}^n$ diciamo *punto medio del segmento* $\overline{AB}$ l'unico punto $M \in \overline{AB}$ tale che

$$d(A, M) = d(M, B).$$

Esercizio E5. Provare che tale definizione coincide con quella di punto medio data nell'ambito degli spazi affini, nel paragrafo 1.12.

Provare inoltre che, posti $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $B = (b_1, \dots, b_n)$, allora

$$M = \frac{A + B}{2} := \frac{(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)}{2}.$$

Nel capitolo precedente (vedi Definizione 1.11.2) abbiamo introdotto la proiezione, su un sottospazio affine S di $\mathbb{A}^n$, parallela a un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ (complementare alla giacitura di S).

In uno spazio euclideo possiamo considerare la situazione particolare in cui U è l'ortogonale della giacitura di S e dare la seguente nozione.

Definizione 2.3.4. Sia $S = Q + W$ un sottospazio euclideo di $\mathbb{E}^n$. Si dice *proiezione ortogonale su S* l'applicazione

$$p_U : \mathbb{E}^n \longrightarrow S \quad \text{data da} \quad P \mapsto (P + U) \cap S$$

dove $U = W^\perp$. In particolare, se $P \in \mathbb{E}^n$, la *proiezione ortogonale di P su S* è il punto $p_U(P)$ cioè

$$P_0 := (P + W^\perp) \cap S.$$

Esempio 2.3.1. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e il piano di equazione $H : x - y + 3z + 1 = 0$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su H , calcoliamo anzitutto la giacitura W di H e il sottospazio $W^\perp$. Chiaramente quest'ultimo è la retta vettoriale $W^\perp = \langle (1, -1, 3) \rangle$. Per definizione

$$P_0 = (P + W^\perp) \cap H$$

si ottiene intersecando la retta $r = P + W^\perp$ e il piano H .

Poiché $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, -1, 3) = (1 + \lambda, 2 - \lambda, 3 + 3\lambda)$, bisogna determinare λ in modo che

$$(1 + \lambda) - (2 - \lambda) + 3(3 + 3\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -9/11.$$

Sostituendo nell'equazione parametrica di r si ottiene infine

$$P_0 = (1 - 9/11, 2 + 9/11, 3 - 27/11) = (2/11, 31/11, 6/11).$$

Esempio 2.3.2. Si considerino il punto $P = (1, 2, 3) \in \mathbb{E}^3$ e la retta di equazione $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2)$. Per determinare la proiezione ortogonale P_0 di P su r , calcoliamo anzitutto la giacitura W di r e il sottospazio $W^\perp$. Chiaramente quest'ultimo è il piano vettoriale $W^\perp : 2x - y + 2z = 0$. Per definizione

$$P_0 = (P + W^\perp) \cap r$$

si ottiene intersecando il piano $\pi = P + W^\perp$ e la retta r . È immediato verificare che $\pi : 2x - y + 2z - 6 = 0$ e quindi, essendo $r : (x, y, z) = (1 + 2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$, si deve determinare λ in modo che

$$2(1 + 2\lambda) - \lambda + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 4/9 \Rightarrow P_0 = (17/9, -4/9, 8/9).$$

La nozione di proiezione ortogonale verrà ora utilizzata nel trovare dei metodi per determinare alcune distanze.

Il primo caso è quello di distanza di un punto da un sottospazio euclideo.

Proposizione 2.3.3. Siano S un sottospazio euclideo e Q un punto di $\mathbb{E}^n$. Allora, posta Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Dimostrazione. Basta provare che, comunque scelto un punto $P \in S$, si ha $d(Q, P) \geq d(Q, Q_0)$ o, equivalentemente, che $\|Q - P\|^2 \geq \|Q - Q_0\|^2$.

Possiamo scrivere il sottospazio S come $S = P + W$ e osservare che (per la Proposizione 1.2.1) $P - Q_0 \in W$. D'altro canto, per definizione di proiezione ortogonale, $Q - Q_0 \in W^\perp$. Per la Relazione di Chasles si ha inoltre

$$Q - P = (Q - Q_0) + (Q_0 - P).$$

Pertanto, per l'Osservazione 2.1.1, si ottiene

$$\|Q - P\|^2 = \|Q - Q_0\|^2 + \|Q_0 - P\|^2 \geq \|Q - Q_0\|^2.$$

□

Proposizione 2.3.4. *Si fissi un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^n$ e si considerino un punto $Q = (q_1, \dots, q_n)$ e un iperpiano $H : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Allora*

$$d(Q, H) = \frac{|a_1q_1 + \dots + a_nq_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Si consideri un versore (cioè un vettore di norma 1) ortogonale a H , ad esempio

$$n := \frac{(a_1, \dots, a_n)}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Essendo anche $Q - Q_0$ ortogonale a H , si ha

$$|\langle Q - Q_0, n \rangle| = \|Q - Q_0\| = d(Q, H),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Proposizione precedente. Per calcolare il suddetto prodotto scalare, basta scegliere un qualunque punto $P \in H$, applicare la Relazione di Chasles e la bilinearità, ottenendo

$$\langle Q - Q_0, n \rangle = \langle Q - P, n \rangle + \langle P - Q_0, n \rangle.$$

Ma $\langle P - Q_0, n \rangle = 0$ in quanto $P - Q_0$ appartiene alla giacitura di H , che è $\langle n \rangle^\perp$. Pertanto

$$d(Q, H) = |\langle Q - Q_0, n \rangle| = |\langle Q - P, n \rangle|.$$

Denotando le coordinate di P con $(y_1, \dots, y_n)$ e tenendo conto che $P \in H$, vale $a_1y_1 + \dots + a_ny_n = -b$. Quindi

$$d(Q, H) = \frac{|\langle (q_1 - y_1, \dots, q_n - y_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

da cui la tesi. □

Osservazione 2.3.1. Se S e T sono due sottospazi paralleli di $\mathbb{E}^n$ e $S \cap T = \emptyset$ allora la loro distanza è non nulla. Vediamo come determinarla. Sia $\dim(T) \leq \dim(S)$. Allora, scelto un qualunque punto $Q \in T$ e denotando con Q_0 la proiezione ortogonale di Q su S , si ha

$$d(T, S) = d(Q, S) = d(Q, Q_0).$$

Chiaramente, se $\dim(T) = \dim(S)$, i ruoli di S e T si possono scambiare.

Esempio 2.3.3. Si considerino la retta r e il piano π di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 2), \quad \pi : x + 2y + 4 = 0.$$

Poiché le rispettive giaciture sono $W_r = \langle (2, -1, 2) \rangle$ e $W_\pi : x + 2y = 0$, si vede immediatamente che $W_r \subset W_\pi$ e dunque $r \parallel \pi$. Tenendo conto che $\dim(r) = 1 < 2 = \dim(\pi)$, per l'Osservazione 2.3.1 si ha che $d(r, \pi) = d(Q, \pi)$, dove Q è un qualunque punto di r . Ad esempio, si scelga $Q = (1, 0, 0)$ e si calcoli, per la Proposizione 2.3.4,

$$d(Q, \pi) = \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

Esempio 2.3.4. Si considerino i due piani paralleli π_1 e π_2 di $\mathbb{E}^3$ dati da

$$\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0, \quad \pi_2 : x + 2y - z + 10 = 0.$$

Ancora per l'Osservazione 2.3.1 si ha

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(Q, \pi_2),$$

dove Q è un qualunque punto di π_1 . Ad esempio, si scelga $Q = (0, 0, 4)$ e si calcoli, ancora per la Proposizione 2.3.4,

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|-4 + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}.$$

Esempio 2.3.5. Si considerino le due rette parallele r_1 e r_2 di $\mathbb{E}^3$ date da

$$r_1 : (x, y, z) = (3, -1, 1) + \lambda(2, -1, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \mu(2, -1, 2).$$

In questo caso si deve procedere diversamente dai due precedenti esempi. Infatti una retta in $\mathbb{E}^3$ non è un iperpiano, quindi non si può utilizzare la formula della Proposizione 2.3.4. Un modo possibile è applicare la seconda uguaglianza dell'Osservazione 2.3.1:

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q_0),$$

dove $Q \in r_1$ e Q_0 è la proiezione ortogonale di Q su r_2 . Invece di scegliere un punto su r_1 , si noti che si può procedere ancora più rapidamente considerando un piano π ortogonale a entrambe le rette. Evidentemente π interseca ogni retta in un punto e questi due punti sono uno la proiezione ortogonale dell'altro sull'altra retta. Pertanto, posti $Q_1 := \pi \cap r_1$ e $Q_2 := \pi \cap r_2$, si ha

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2),$$

Si scelga, ad esempio, $\pi : 2x - y + 2z = 0$. Con facili calcoli si vede che

$$Q_1 := \pi \cap r_1 = (1, 0, -1), \quad Q_2 := \pi \cap r_2 = (0, 2, 1).$$

Pertanto

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\| = \|(1, -2, -2)\| = 3.$$

Concludiamo questo paragrafo con la determinazione della distanza tra due rette sghembe dello spazio euclideo canonico $\mathbb{E}^3$, assieme alle nozioni di *retta e segmento di minima distanza*.

Teorema 2.3.5. *Siano r e s due rette sghembe di $\mathbb{E}^3$. Allora*

- i) esiste un'unica coppia π_r e π_s di piani paralleli a entrambe le rette (e paralleli tra loro) tali che $r \subset \pi_r$ e $s \subset \pi_s$;*
- ii) esiste un'unica retta t ortogonale e incidente r e s (detta retta di minima distanza);*
- iii) posti $R := t \cap r$ e $S := t \cap s$, si ha*

$$d(r, s) = d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S),$$

dove il segmento RS è detto segmento di minima distanza tra r e s .

Dimostrazione. Siano $r = A + \langle v_r \rangle$ e $s = B + \langle v_s \rangle$.

i) Chiaramente $\pi_r = A + \langle v_r, v_s \rangle$ e $\pi_s = B + \langle v_r, v_s \rangle$. Si noti che questi sono veramente due piani in quanto $\dim_{\mathbb{R}} \langle v_r, v_s \rangle = 2$ poiché v_r e v_s non sono paralleli per ipotesi.

ii) Si consideri l'unica (a meno di multipli) direzione w ortogonale sia a r che a s (e quindi anche ortogonale a π_r e π_s), data da

$$\langle w \rangle := \langle v_r, v_s \rangle^{\perp}.$$

Denotiamo con ρ l'unico piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ (di sostegno r) che è parallelo a w ; e, analogamente, denotiamo con σ l'unico piano del fascio di piani $\mathcal{F}_s$ (di sostegno s) che è parallelo a w . Le loro giaciture sono

$$W_{\rho} = \langle v_r, w \rangle, \quad W_{\sigma} = \langle v_s, w \rangle.$$

Quindi, per la Proposizione 1.2.2, $t := \rho \cap \sigma$ è una retta di giacitura $W_{\rho} \cap W_{\sigma} = \langle w \rangle$, che risulta dunque ortogonale sia a r che a s .

Inoltre t e r giacciono entrambe sul piano ρ e sono ortogonali, quindi non parallele; pertanto sono incidenti. Analogamente t e s sono incidenti.

Per provare l'unicità di t , supponiamo che esista un'altra retta t' ortogonale e incidente r e s . Per quanto osservato all'inizio, c'è un'unica direzione w ortogonale a r e a s , dunque $t' \parallel t$. In particolare, t e t' sono complanari. Per questo, denotando con $R' := t' \cap r$ e $S' := t' \cap s$, si ha che i punti R, S, R', S' sono complanari. Il piano che li contiene, pertanto, deve contenere r (individuata da R e R') e analogamente s , mentre r e s sono sghembe per ipotesi.

iii) Si noti che

$$d(r, s) := \inf \{d(P, Q) \mid P \in r, Q \in s\} \geq d(\pi_r, \pi_s).$$

Se si prova che $d(\pi_r, \pi_s)$ è raggiunta dalla coppia di punti $R \in r$ e $S \in s$, allora si ha la tesi. Per fare questo, basta osservare che la retta t è ortogonale a π_r e π_s per (ii) e che

$$R = t \cap r = t \cap \pi_r, \quad S = t \cap s = t \cap \pi_s.$$

Dunque S è la proiezione ortogonale di R su π_s (e viceversa); pertanto, per la Proposizione 2.3.3, $d(\pi_r, \pi_s) = d(R, S)$. $\square$

2.4 Automorfismi di spazi vettoriali euclidei

In questo paragrafo e fino alla fine di questo capitolo sulla Geometria euclidea, tratteremo dello spazio affine euclideo canonico $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$.

Definiremo i “morfismi opportuni” tra spazi affini euclidei: saranno delle affinità le cui parti lineari saranno i “morfismi opportuni” tra spazi vettoriali euclidei. Partiamo dunque ricordando quest’ultima nozione.

Definizione 2.4.1. Diciamo che un isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un *automorfismo (ortogonale) di $\mathbb{R}$ - spazi vettoriali euclidei* se, comunque scelti $v, w \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle. \quad (2.1)$$

Osservazione 2.4.1. È immediato provare che se $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un automorfismo ortogonale allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\|v\| = \|\varphi(v)\|.$$

Si può dimostrare che vale anche il viceversa: se $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ preserva la norma, allora ϕ è ortogonale $\textcircled{A}$.

Ricordiamo un noto risultato di Algebra lineare.

Teorema 2.4.1. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un’applicazione lineare, sono equivalenti:

- i) φ è un automorfismo ortogonale;
- ii) per ogni base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$, la n -upla $(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$ è ancora una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;
- iii) per ogni base ortonormale $\mathcal{B}$, la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ è ortogonale;
- iv) esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Proviamo solo l’equivalenza $i) \Leftrightarrow iii)$.

Osserviamo preliminarmente il seguente fatto. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Identificando ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ con la colonna delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$, si ha che $\langle v, w \rangle = {}^t v \mathbb{I}_n w = {}^t v w$ e che $\varphi(v) = Mv$ e $\varphi(w) = Mw$. Pertanto

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle Mv, Mw \rangle = {}^t(Mv)Mw = {}^t v ({}^t M M)w.$$

$iii) \Rightarrow i)$ Supponiamo che M sia una matrice ortogonale, cioè che ${}^t M M = \mathbb{I}_n$. Dunque dall’espressione precedente segue

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = {}^t v ({}^t M M)w = {}^t v w = \langle v, w \rangle.$$

In tal modo è provata la (2.1).

i) ⇒ iii) Viceversa, se vale la (2.1) per ogni scelta di v e w , si ha

$${}^t v w = \langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = {}^t v ({}^t M M) w.$$

Dall'arbitrarietà di v e w segue che ${}^t M M = \mathbb{I}_n$, come volevamo. $\square$

Introduciamo la seguente notazione.

Definizione 2.4.2. L'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a entrate reali che sono ortogonali si denota con $O(n, \mathbb{R})$ o semplicemente con $O(n)$ e si dice *gruppo ortogonale di ordine n* .

Esercizio E6. Provare che $O(n)$ è effettivamente un gruppo in quanto sottogruppo di $GL(n)$. Provare inoltre che per ogni matrice $M \in O(n)$ si ha $\det(M) = \pm 1$. Infine provare che l'insieme

$$SO(n) := \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}$$

è un sottogruppo di $O(n)$, detto *gruppo ortogonale speciale di ordine n* .

Un esempio di automorfismo ortogonale è il seguente.

Definizione 2.4.3. Se H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, possiamo scrivere ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$ in modo unico come $v = v_H + v_{H^\perp}$, dove $v_H \in H$ e $v_{H^\perp} \in H^\perp$. Si dice *simmetria rispetto a H* l'applicazione

$$\text{sy}_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{definita da} \quad v = v_H + v_{H^\perp} \mapsto v_H - v_{H^\perp}.$$

Esempio 2.4.1. In $\mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto alla retta L (asse x) è data da $\text{sy}_L(x, y) = (x, -y)$, mentre la simmetria rispetto all'origine si esprime come $\text{sy}_O(x, y) = (-x, -y)$. Come si esprime la simmetria rispetto alla retta $x = y$? 

Proposizione 2.4.2. Con le notazioni precedenti, l'applicazione sy_H è un automorfismo ortogonale di $\mathbb{R}^n$ in quanto la sua matrice associata (rispetto a una base ortonormale) è ortogonale. In particolare, se H è un iperpiano, tale matrice è ortogonale non speciale.

Dimostrazione. Lasciamo al lettore la verifica che sy_H è un'applicazione lineare. Sia $s := \dim(H)$. Se $s = 0$, la tesi segue banalmente. Sia dunque $s \geq 1$ e sia $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_s)$ una base ortonormale di H . Si consideri il suo completamento a una base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$. Chiaramente la matrice associata (rispetto a $\mathcal{B}$) alla simmetria risulta

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{sy}_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

dove sulla diagonale compare 1 per s volte e -1 per $n - s$ volte e tale matrice è ovviamente ortogonale. Pertanto, per il Teorema 2.4.1, sy_H è un automorfismo ortogonale.

Infine, se H è un iperpiano, allora $s = n - 1$ e dunque $\det(M_B^B(\text{sy}_H)) = -1$, pertanto la matrice è ortogonale non speciale. $\square$

Vediamo ora alcuni casi particolari in dimensione bassa.

Osservazione 2.4.2. Nel caso $n = 1$, gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ sono soltanto $\pm \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Se $n = 2$, per il Teorema 2.4.1, classificare gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$ significa descrivere le matrici del gruppo $O(2)$.

Teorema 2.4.3. *Se $M \in O(2)$, allora esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che M è di uno dei seguenti due tipi:*

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad S_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

dove, ovviamente, R_θ è speciale (cioè $R_\theta \in SO(2)$) e S_θ è non speciale (cioè $S_\theta \in O(2) \setminus SO(2)$).

Dimostrazione. Poiché le colonne di M sono due vettori di norma 1, esistono due angoli $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \varphi \\ \sin \theta & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Inoltre tali vettori devono essere ortogonali, cioè

$$0 = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi = \sin(\theta + \varphi).$$

Di conseguenza, $\theta + \varphi$ deve essere 0 o π . Nel primo caso $\varphi = -\theta$ e si ottiene la matrice R_θ ; nel secondo caso $\varphi = \pi - \theta$ e si ottiene la matrice S_θ . $\square$

Proposizione 2.4.4. *Per una matrice $M \in O(2)$ ci sono le seguenti possibilità: o $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$, per qualche θ .*

i) *Nel primo caso, R_θ ha autovalori reali se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ se e solo se $R_\theta = \pm \mathbb{I}_2$.*

ii) *Nel secondo caso, S_θ ha sempre autovalori reali e precisamente ± 1 . Inoltre i relativi autospazi V_1 e V_{-1} sono tra loro ortogonali.*

Dimostrazione.

i) Si consideri il polinomio caratteristico di R_θ dato da

$$P_\lambda(R_\theta) = \det(R_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + (\sin \theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1.$$

Esso ha radici reali se e solo se il suo discriminante $\Delta/4 = (\cos \theta)^2 - 1 \geq 0$. Ma tale condizione equivale ovviamente a $(\cos \theta)^2 - 1 = 0$; questo si verifica se e solo se $\cos \theta = \pm 1$ ovvero se e solo se $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. L'ultima affermazione è banale.

ii) Si osservi anzitutto che S_θ , essendo una matrice 2×2 simmetrica reale, ha due autovalori reali e, se distinti, i suoi due autospazi sono ortogonali. Per calcolare tali autovalori, si consideri il polinomio caratteristico di S_θ dato da

$$P_\lambda(S_\theta) = \det(S_\theta - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - 1.$$

Esso è indipendente da θ e ha sempre come radici ± 1 . $\square$

Osservazione 2.4.3. Per comprendere il significato geometrico di R_θ , basta considerare l'automorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Utilizzando le coordinate polari nel dominio e nel codominio, si ha una forma esplicita più significativa. Infatti

$$r(\cos \psi, \sin \psi) \mapsto (r \cos \psi \cos \theta - r \sin \psi \sin \theta, r \cos \psi \sin \theta + r \sin \psi \cos \theta)$$

e quest'ultima espressione è esattamente $r(\cos(\psi + \theta), \sin(\psi + \theta))$. Pertanto R_θ è associata alla rotazione di angolo θ .

Esempio 2.4.2. Vediamo due esempi di matrici non speciali S_θ nei casi $\theta = 0$ e $\theta = \pi$:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale di $\mathbb{R}^2$ è dato da $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Nel secondo caso, il corrispondente automorfismo ortogonale è dato da $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Le matrici S_0 e S_π sono associate, rispettivamente, alla simmetria rispetto a $\langle e_1 \rangle$ (asse x) e a quella rispetto a $\langle e_2 \rangle$ (asse y) (vedi Definizione 2.4.3 e Proposizione 2.4.2).

Tali esempi rientrano in una situazione più generale.

Proposizione 2.4.5. *Ogni matrice S_θ è associata a una simmetria e precisamente a sy_{V_1} , dove V_1 è l'autospazio di S_θ associato all'autovalore 1.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_1^\perp = V_1 \oplus V_{-1}$. Quindi, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere $v = v_{V_1} + v_{V_{-1}}$.

Da una parte, per definizione di autovettore, ovviamente $S_\theta(v_{V_1}) = v_{V_1}$ e $S_\theta(v_{V_{-1}}) = -v_{V_{-1}}$. Pertanto, per la linearità,

$$S_\theta(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

D'altra parte, per definizione di simmetria rispetto a V_1 , si ha

$$\text{sy}_{V_1}(v) = v_{V_1} - v_{V_{-1}}.$$

□

E' immediato calcolare l'autospazio V_1 di

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Infatti è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(S_\theta - \mathbb{I}_2)X = 0$. Chiaramente, è sufficiente una sola equazione, ad esempio

$$V_1 : (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0$$

Da quanto abbiamo visto, identificando un automorfismo ortogonale con la (una) matrice associata rispetto a una base ortonormale, siamo condotti naturalmente a dare la seguente nozione.

Definizione 2.4.4. Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un automorfismo ortogonale, diciamo che è una *rotazione* se la (ogni) matrice associata è di tipo R_θ (cioè ortogonale speciale), mentre diciamo che è una *simmetria* se la (ogni) matrice associata è di tipo S_θ (cioè ortogonale non speciale).

Le seguenti semplici proprietà sono lasciate come esercizio (alcune di queste possono essere dimostrate utilizzando note formule trigonometriche).

Proposizione 2.4.6. *Comunque scelti θ e φ , valgono:*

$$i) S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi} \in SO(2);$$

$$ii) R_\theta R_\varphi = R_{\varphi+\theta} \in SO(2);$$

$$iii) R_\theta S_\varphi = S_{\varphi+\theta} \notin SO(2);$$

$$iv) S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \notin SO(2);$$

$$v) S_{2\theta} = R_\theta S_0 R_{-\theta}.$$

In particolare, la composizione di una rotazione e di una simmetria non è commutativa.

Dalla *ii)* segue che $SO(2)$ è un gruppo abeliano (però $SO(n)$ non è abeliano per $n \geq 3$).

2.5 Isometrie degli spazi euclidei

Definizione 2.5.1. Si dice *isometria* dello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n$ una affinità f la cui parte lineare $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un automorfismo ortogonale. L'insieme delle isometrie di $\mathbb{E}^n$ si denota con $\text{Is}(\mathbb{E}^n)$.

Proposizione 2.5.1. *L'insieme $\text{Is}(\mathbb{E}^n)$ è un gruppo (rispetto alla composizione) in quanto sottogruppo di $\text{Aff}(\mathbb{E}^n)$.*

Dimostrazione. Basta ricordare che gli automorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^n$ costituiscono un sottogruppo di $GL(n)$, che è infatti il gruppo ortogonale $O(n)$ (vedi Esercizio E6). $\square$

Si osservi che, in quanto affinità, una isometria $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ ammette un'equazione matriciale del tipo

$$Y = MX + C.$$

Si sottointende che si è fissato un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ di $\mathbb{E}^n$, dove $\mathcal{B}$ è una base ortonormale fissata. Nella scrittura precedente, X e Y sono, rispettivamente, le colonne delle coordinate del generico punto $P \in \mathbb{E}^n$ e di $f(P) \in \mathbb{E}^n$. Inoltre con C si denota la colonna delle coordinate di un punto specifico e con M la matrice ortogonale $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Un immediato esempio di isometria è dato dalle traslazioni.

Infatti abbiamo osservato nell'Esempio 1.10.2 che un'affinità $f \in \text{Aff}(\mathbb{E}^n)$ di equazione $Y = MX + C$ (rispetto a un sistema di riferimento $(O, \mathcal{B})$) è una traslazione se e solo se $M = \mathbb{I}_n$. (In tal caso $f = t_v$, dove $v = C - O$). Chiaramente $\mathbb{I}_n \in O(n)$.

Esercizio E7. Provare che l'insieme $T(\mathbb{E}^n)$ delle traslazioni di $\mathbb{E}^n$ è un sottogruppo di $\text{Is}(\mathbb{E}^n)$, isomorfo al gruppo additivo $(\mathbb{R}^n, +)$.

Le più semplici “proprietà euclidee”, cioè quelle che vengono mantenute per isometria, sono le distanze e gli angoli.

Proposizione 2.5.2. *Sia $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, per ogni $P, Q \in \mathbb{E}^n$ vale*

$$d(P, Q) = d(f(P), f(Q)).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$d(P, Q)^2 = \|Q - P\|^2$$

e, analogamente, tenendo conto che f è un'affinità di parte lineare φ ,

$$d(f(P), f(Q))^2 = \|f(Q) - f(P)\|^2 = \|\varphi(Q - P)\|^2.$$

Si conclude osservando che $\|Q - P\|^2 = \|\varphi(Q - P)\|^2$ per l'Osservazione 2.4.1. $\square$

Esercizio E8. Sia $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ e sia $r : P = Q + \lambda v$ una retta. Provare che $f(r)$ è la retta di equazione

$$f(r) : P = f(Q) + \lambda \varphi(v).$$

Proposizione 2.5.3. Sia $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^n)$ di parte lineare φ . Allora, se r e s sono due rette di $\mathbb{E}^n$, si ha

$$\widehat{rs} = \widehat{f(r)f(s)}.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che l'angolo $\theta = \widehat{rs}$ è individuato da

$$\cos \theta = \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|}.$$

Per l'Esercizio E8, l'angolo $\theta' = \widehat{f(r)f(s)}$ è individuato da

$$\cos \theta' = \frac{|\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle|}{\|\varphi(v_r)\| \|\varphi(v_s)\|}.$$

Ma per la Definizione 2.4.1 e l'Osservazione 2.4.1 valgono le seguenti uguaglianze

$$\langle \varphi(v_r), \varphi(v_s) \rangle = \langle v_r, v_s \rangle, \quad \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|, \quad \|\varphi(v_s)\| = \|v_s\|$$

e quindi $\cos \theta = \cos \theta'$. □

Concludiamo questo paragrafo con alcune nozioni e un risultato relativi alle affinità che saranno utili nel prossimo paragrafo.

Definizione 2.5.2. Siano $\mathbb{A}$ uno spazio affine e $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ una affinità. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}$ si dice

- *invariante per f* se $f(S) = S$;
- *fisso per f* se $f(P) = P$ per ogni punto $P \in S$.

Chiaramente fisso implica invariante, ma non viceversa.

Proposizione 2.5.4. Siano V un K -spazio vettoriale e $\mathbb{A} = \mathbb{A}(V)$. Sia inoltre $f \in \text{Aff}(\mathbb{A})$ di parte lineare $\varphi \in GL(V)$. Infine sia $P_0 \in \mathbb{A}$ un punto fisso per f . Si hanno i seguenti fatti:

- i) se $\lambda \in K$ è un autovalore di φ e V_λ denota il relativo autospazio, allora il sottospazio affine $S := P_0 + V_\lambda$ è invariante per f ;
- ii) in particolare, se $\lambda = 1$, allora $S := P_0 + V_1$ è fisso per f .

Dimostrazione. *i)* Vogliamo provare che, per ogni $Q \in S$ allora $f(Q) \in S$. Osserviamo che $Q - P_0 \in V_\lambda$, pertanto $\varphi(Q - P_0) = \lambda(Q - P_0)$ e quindi

$$f(Q) - f(P_0) = \lambda(Q - P_0).$$

Ma $f(P_0) = P_0$, dunque $f(Q) = P_0 + \lambda(Q - P_0) \in S$.

ii) Con lo stesso ragionamento visto sopra, per ogni $Q \in S$ si ottiene che $f(Q) = P_0 + (Q - P_0) = Q$, come volevamo. $\square$

Esempio 2.5.1. L'affinità f di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ definita come $f(x) = 1 - x$ ha $x = \frac{1}{2}$ come unico punto fisso.

L'affinità $g \in \text{Aff}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2)$, $g(x, y) = (x + 1, -y)$ ha la retta $y = 0$ come sottospazio invariante, ma non ha punti fissi $\textcircled{A}$.

Concludiamo questo paragrafo ricordando anzitutto la Definizione 2.2.3 di riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^n$, che è il dato di un punto O fissato e di una base ortonormale $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Inoltre vale il seguente risultato di Algebra Lineare.

Lemma 2.5.5. *Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi ortonormali dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ allora $M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ è una matrice ortogonale cioè $M \in O(n)$.*

Poiché $\mathbb{E}^n$ ha anche la struttura di spazio affine, il cambio di riferimento in tale ambiente è come quello descritto per $\mathbb{A}^n$ nel Teorema 1.10.1, il cui analogo euclideo è il seguente.

Teorema 2.5.6. *Siano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ due riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^n$ e siano $(c_1, \dots, c_n)$ le coordinate del punto O nel riferimento Σ' . Se un punto $P \in \mathbb{E}^n$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ rispetto a Σ e coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ rispetto a Σ' , allora, posti*

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

si ha

$$Y = AX + C.$$

Come nel caso affine, la precedente espressione del *cambio di coordinate euclidee* è dello stesso tipo dell'equazione matriciale di un'isometria. Infatti, per il Lemma precedente, la matrice A è ortogonale.

Definizione 2.5.3. Diremo che la precedente espressione definisce un *cambio speciale di coordinate euclidee* se $A \in SO(n)$.

2.6 Classificazione delle isometrie del piano

Tenuto conto della Proposizione 2.4.4, abbiamo una prima suddivisione delle isometrie del piano.

Definizione 2.6.1. Sia $f \in \text{Is}(\mathbb{E}^2)$ data dall'equazione, rispetto a un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$,

$$Y = MX + C, \quad M \in O(2).$$

Se $M = R_\theta \in SO(2)$, diremo che f è una *isometria diretta* o *rototraslazione*. Se invece $M = S_\theta$, diremo che f è una *isometria inversa*.

Vediamo alcuni casi particolari.

Esempio 2.6.1. Un primo esempio di isometria diretta (vedi Esercizio E7) è dato dalle *traslazioni*. Infatti

$$Y = X + C$$

ha come parte lineare l'identità (ovviamente $\mathbb{I}_2 \in SO(2)$) ed è l'equazione della traslazione t_v , dove $v = C - O$.

Esempio 2.6.2. Se $C = O$, allora l'isometria $Y = MX$ può essere identificata con una rotazione di tipo R_θ o con una simmetria di tipo S_θ , a seconda che $M = R_\theta$ o $M = S_\theta$. Esplicitamente:

$$Y = R_\theta X, \quad Y = S_\theta X.$$

Qui si è fatto un piccolo abuso di notazione. Infatti, se $X = O + v$, con $R_\theta X$ si intende il punto $O + R_\theta v$, dove $R_\theta v$ è prodotto matriciale. Analogamente per $S_\theta X$.

Definizione 2.6.2. Una *rotazione di angolo θ e di centro il punto P_0* è l'isometria

$$\rho_{\theta, P_0} := t_w \circ R_\theta \circ t_{-w}$$

dove $w = P_0 - O$.

Osservazione 2.6.1. Per determinare la forma matriciale di ρ_{θ, P_0} basta osservare che $t_{-w}(X) = X + (O - P_0) = O + (X - P_0)$ e quindi

$$\begin{aligned} t_w(R_\theta(t_{-w}(X))) &= t_w(R_\theta(O + (X - P_0))) = t_w(O + R_\theta(X - P_0)) = \\ &= O + (P_0 - O) + R_\theta(X - P_0) = P_0 + R_\theta(X - P_0). \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione di ρ_{θ, P_0} risulta $Y = P_0 + R_\theta(X - P_0)$ o anche

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0.$$

Dunque ρ_{θ, P_0} è una rototraslazione.

Come vedremo nel Teorema di classificazione, le traslazioni e le rotazioni di dati angolo e centro sono le uniche isometrie dirette.

Esempio 2.6.3. Vogliamo determinare l'equazione della rotazione $\rho_{\pi/4, P_0}$ di angolo $\pi/4$ di centro $P_0 = (2, 4)$. L'equazione richiesta è $Y = MX + C$, dove

$$M = R_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e

$$C = (\mathbb{I}_2 - R_{\pi/4})P_0 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4 - \frac{6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora alcuni tipi e proprietà delle isometrie inverse.

Definizione 2.6.3. Se $r \subset \mathbb{E}^2$ è una retta e $P \in \mathbb{E}^2$ è un punto, posta s_P la retta per P e ortogonale a r e denotato con M il punto $r \cap s_P$, diciamo che $P' \in \mathbb{E}^2$ è il *punto simmetrico di P rispetto a r* se $P' \in s_P$ e M è il punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si dice *riflessione rispetto a r* l'affinità

$$\sigma_r : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \quad \text{data da} \quad P \mapsto P'$$

dove P' è il punto simmetrico di P rispetto a r .

Il fatto che σ_r sia realmente un'affinità discende dalla prossima Proposizione 2.6.3, dove si afferma che è addirittura un'isometria.

Osservazione 2.6.2. Da questa definizione, si vede facilmente che r è fissa rispetto a σ_r . Inoltre ogni retta ortogonale a r è invariante rispetto a σ_r . Infatti, se s è una qualunque retta ortogonale a r , si scelga un suo punto P e si osservi che $s = s_P$ (con la notazione della definizione precedente). Per costruzione il punto simmetrico di P è $P' \in s_P$. Pertanto $\sigma_r(P) \in s = s_P$ e quindi $\sigma_r(s) \subseteq s$. Infine si osservi che $\sigma_r \circ \sigma_r = id_{\mathbb{E}^2}$. Da tale fatto, applicando σ_r all'inclusione appena dimostrata si ha

$$\sigma_r(\sigma_r(s)) \subseteq \sigma_r(s) \quad \Rightarrow \quad s \subseteq \sigma_r(s).$$

Questo prova l'altra inclusione, da cui segue che s è invariante rispetto a σ_r .

Esempio 2.6.4. Se r è l'asse y , la riflessione rispetto a r è data da

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y).$$

Se r è l'asse x , la riflessione rispetto a r è data da

$$\sigma_r(x, y) = (x, -y).$$

Proposizione 2.6.1. *Si consideri l'isometria inversa f di equazione, rispetto a un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$, data da*

$$Y = S_\theta X.$$

Posto $r = V_1$ l'autospazio di S_θ associato a 1, si hanno i seguenti fatti:

- i) r è una retta fissa per f ;*
- ii) ogni retta s ortogonale a r è invariante per f ;*
- iii) f è la riflessione σ_r .*

Dimostrazione.

i) Si osservi che il punto O è fisso per f in quanto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, per la Proposizione 2.4.5, gli autovalori di S_θ sono 1 e -1 . Dunque, per la Proposizione 2.5.4, $r = O + V_1$ è una retta fissa per f .

ii) Ricordiamo che, essendo S_θ una matrice simmetrica reale, i suoi autospazi V_1 e V_{-1} sono ortogonali. Sia ora s una retta ortogonale a r e sia $Q := r \cap s$. Per la (i), il punto Q è fisso per f . Scrivendo $s = Q + V_{-1}$, ancora per la Proposizione 2.5.4, si ha che s è invariante per f .

iii) Poiché la nozione di riflessione è intrinseca (cioè non dipende dal sistema di riferimento, in quanto coinvolge proprietà geometriche quali l'ortogonalità e la distanza), basta provare l'enunciato rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = (v_r, w_r)$, dove v_r è un versore parallelo a r e w_r è un versore ortogonale a r . Nel riferimento $(O, \mathcal{B})$ la retta r ha equazione $y = 0$ e

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $f(x, y) = (x, -y)$ è la riflessione rispetto alla retta r . □

Corollario 2.6.2. *Le simmetrie sono tutte e sole le riflessioni rispetto a rette passanti per l'origine.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente, una simmetria S_θ è una riflessione rispetto a V_1 , che è una retta per l'origine.

Viceversa, sia r una retta per l'origine e σ_r la riflessione rispetto a r . Come osservato nella dimostrazione della Proposizione precedente, la nozione di riflessione è intrinseca e quindi basta provare la tesi utilizzando un qualunque riferimento cartesiano. Sia $\mathcal{B} = (v_r, w_r)$ la base ortonormale dove v_r è parallelo a r (e w_r è ortogonale). Rispetto al riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$, la retta r è l'asse x e $\sigma_r(x, y) = (x, -y)$ (vedi Esempio 2.6.4).

Quindi σ_r è l'isometria associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è del tipo S_θ . Pertanto σ_r è una simmetria. □

In realtà una qualunque riflessione è comunque legata a una simmetria. La dimostrazione del seguente risultato è lasciata per esercizio.

Proposizione 2.6.3. *La riflessione σ_r , rispetto a una qualunque retta r del piano, è un'isometria inversa di $\mathbb{E}^2$ e precisamente del tipo*

$$\sigma_r = t_w \circ S_\theta \circ t_{-w} \quad \text{dove} \quad w = P_0 - O, \quad P_0 \in r.$$

Definizione 2.6.4. Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta e v un vettore parallelo a r ; si dice *glissoriflessione rispetto a r e v* l'isometria definita da

$$gl_{r,v} := t_v \circ \sigma_r.$$

Esempio 2.6.5. L'affinità g dell'Esempio 2.5.1 è una glissoriflessione di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ rispetto all'asse x e al vettore $(1, 0)$.

Teorema 2.6.4. (Classificazione delle isometrie del piano euclideo)
Sia f un'isometria di $\mathbb{E}^2$ espressa, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(2)$ e $C \in \mathbb{E}^2$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

Caso (a): $A = R_\theta$.

i) $R_\theta = \mathbb{I}_2 \Rightarrow f = t_w$, dove $w = C - O$. Inoltre, se $C \neq O$, allora f non ha punti fissi.

ii) $R_\theta \neq \mathbb{I}_2 \Rightarrow f$ ha un punto fisso P_0 di coordinate $(\mathbb{I}_2 - R_\theta)^{-1}C$ ed è dunque la rotazione di angolo θ e centro P_0 .

Caso (b): $A = S_\theta$.

iii) f ha un punto fisso $P_0 \Rightarrow f$ è la riflessione σ_r rispetto alla retta $r = P_0 + V_1$ (dove V_1 è l'autospazio di S_θ associato all'autovalore 1), che è dunque una retta fissa per f .

iv) f non ha punti fissi $\Rightarrow f$ è una glissoriflessione.

Dimostrazione.

(i) Chiaramente $Y = X + C$ è la traslazione t_w dove $w = C - O$. Inoltre, se $\bar{X}$ fosse un punto fisso per f , si avrebbe $\bar{X} = \bar{X} + C$ e dunque $C = O$.

(ii) Sia ora $R_\theta \neq \mathbb{I}_2$. Vogliamo provare che esiste un punto fisso P_0 per f . Posto $\bar{X}$ il vettore delle sue coordinate, vogliamo dunque provare che esiste $\bar{X}$ tale che

$$R_\theta \bar{X} + C = \bar{X}$$

cioè che esiste $\overline{X}$ tale che

$$(\mathbb{I}_2 - R_\theta)\overline{X} = C.$$

Per provare questo, è sufficiente mostrare che la matrice $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ è invertibile.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ non sia invertibile. Allora esisterebbe un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $(\mathbb{I}_2 - R_\theta)v = 0$, i.e. $R_\theta v = v$. Pertanto R_θ avrebbe un autovalore reale (che è 1) e dunque, per la Proposizione 2.4.4 -(i), R_θ sarebbe $\mathbb{I}_2$ oppure $-\mathbb{I}_2$. Il primo caso è escluso per ipotesi. Dunque $R_\theta = -\mathbb{I}_2$ e quindi ha un solo autovalore, uguale a -1 , mentre abbiamo appena visto che 1 è autovalore di R_θ . Questo porta a un assurdo.

Pertanto la matrice $\mathbb{I}_2 - R_\theta$ è invertibile e dunque la precedente equazione vettoriale ha una soluzione e precisamente

$$\overline{X} = (\mathbb{I}_2 - R_\theta)^{-1}C,$$

come volevamo. Tale $\overline{X}$ è unico per costruzione e quindi P_0 è l'unico punto fisso di f .

Infine si osservi che dalla precedente relazione si ottiene $C = (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0$ e quindi l'equazione di f è

$$Y = R_\theta X + (\mathbb{I}_2 - R_\theta)P_0$$

ovvero f è la rotazione di angolo θ e centro P_0 (vedi Osservazione 2.6.1).

(iii) Sia ora f data da $f(X) = Y = S_\theta X + C$ e avente un punto fisso P_0 . Per la Proposizione 2.5.4, si ha che $r = P_0 + V_1$ è una retta fissa per f e che $s := P_0 + V_{-1}$ è una retta invariante per f . Tenendo conto che $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_{-1}$, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^2$,

$$Q - P_0 = \lambda v_r + \mu v_s$$

dove v_r e v_s sono vettori direzionali delle rette r e s , rispettivamente. Dunque

$$Q = P_0 + \lambda v_r + \mu v_s.$$

Si può calcolare $f(Q)$, tenendo conto che f ha parte lineare S_θ :

$$f(Q) = f(P_0) + S_\theta(\lambda v_r + \mu v_s) = P_0 + \lambda v_r - \mu v_s$$

e quindi f è la riflessione rispetto alla retta r .

(iv) Sia ora f data dall'equazione, in un riferimento di origine O ,

$$f(X) = Y = S_\theta X + C$$

senza punti fissi. Sia $v := C - O$; questo è un vettore non nullo in quanto f non ha punti fissi per ipotesi. Possiamo scrivere f come

$$f = t_v \circ S_\theta.$$

Gli autospazi di S_θ sono V_1 e V_{-1} , tra loro ortogonali per la Proposizione 2.4.4 -(ii). Consideriamo dunque una base ortonormale $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$, dove $e_1 \in V_1$ ed $e_2 \in V_{-1}$. Dunque possiamo scrivere, per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2.$$

Pertanto $t_v = t_{a_1 e_1} \circ t_{a_2 e_2}$ per l'Esercizio A1 e quindi

$$f = t_{a_1 e_1} \circ t_{a_2 e_2} \circ S_\theta. \quad (2.2)$$

Nel riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ si ha inoltre

$$S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'isometria $g := t_{a_2 e_2} \circ S_\theta$ ha dunque equazione

$$g(X) = Y = S_\theta X + a_2 e_2$$

cioè

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + a_2 \end{pmatrix}.$$

I punti fissi di g sono ovviamente quelli le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y + a_2 \end{pmatrix},$$

cioè l'insieme dei punti per cui $y = a_2/2$. Tale insieme è ovviamente una retta r costituita tutta di punti fissi. Una sua equazione è

$$r = P_0 + V_1$$

dove si è scelto, ad esempio, $P_0 = (0, a_2/2)$. Pertanto, per la parte (iii) di questo teorema, $g = \sigma_r$, riflessione rispetto alla retta r . In conclusione, l'uguaglianza (2.2) diventa

$$f = t_{a_1 e_1} \circ \sigma_r$$

e chiaramente $e_1 \parallel r$, come volevamo. □

Teorema 2.6.5. *Ogni isometria del piano è una composizione finita di riflessioni.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare l'affermazione per le rotazioni, traslazioni e glissoriflessioni.

- 1) Ogni rotazione è composizione di riflessioni per Proposizione 2.4.6-(i)
- 2) Consideriamo la traslazione t_v lungo il vettore non nullo v . Poniamo

$$c := \|v\|/2.$$

Siano r e s due rette ortogonali a v tali che $d(r, s) = c$ e siano σ_r e σ_s le riflessioni rispettive. Vogliamo provare che

$$t_v = \sigma_s \circ \sigma_r \quad \text{oppure} \quad t_v = \sigma_r \circ \sigma_s.$$

Non è restrittivo scegliere un riferimento cartesiano tale che le due rette abbiano equazione

$$r : x = 0, \quad s : x = c.$$

Si osservi che, in tale riferimento, $v = (\pm 2c, 0)$ e le riflessioni sono

$$\sigma_r(x, y) = (-x, y), \quad \sigma_s(x, y) = (2c - x, y).$$

Dunque

$$\sigma_r(\sigma_s(x, y)) = \sigma_r(2c - x, y) = (x - 2c, y) = (x, y) + (-2c, 0)$$

e quindi $\sigma_r \circ \sigma_s$ è la traslazione lungo il vettore $(-2c, 0)$. Analogamente

$$\sigma_s(\sigma_r(x, y)) = \dots = (x, y) + (2c, 0)$$

e quindi $\sigma_s \circ \sigma_r$ è la traslazione lungo il vettore $(2c, 0)$. Questo conclude la dimostrazione.

- 3) Poiché una glissoriflessione è del tipo $gl_{r,v} = t_v \circ \sigma_r$, dove r è una retta e v un vettore direzionale di r , per la parte (2) si ha la tesi. $\square$

Come nel caso delle isometrie del piano, anche lo studio delle isometrie dello spazio si fonda sulla descrizione delle matrici ortogonali reali 3×3 . Ricordiamo che anche in questo caso il determinante è ± 1 e, di conseguenza, possono essere speciali o non speciali. Dunque, anche in questo caso, possiamo dividere le isometrie di $\mathbb{E}^3$ in dirette e inverse, a seconda del segno del determinante della matrice associata.

Il seguente risultato descrive tali matrici.

Proposizione 2.6.6. *Sia $A \in O(3) := O_{\mathbb{R}}(3)$. Allora:*

- i) gli autovalori reali di A sono in numero di 1 o 3;*
- ii) ogni autovalore reale può assumere solo i valori 1 o -1 ;*
- iii) A è simile (in $O(3)$) a una matrice A' della forma*

$$A' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = R_{\theta} \in SO(2)$$

per qualche angolo θ .

Dimostrazione. *i)* Sia $p_A(T)$ il polinomio caratteristico di A . Poiché è di terzo grado e ha coefficienti reali, ha sicuramente una radice reale e le restanti sono o entrambe reali o complesse coniugate.

ii) Interpretando A come la matrice associata, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, a un automorfismo ortogonale φ di $\mathbb{R}^3$, definiamo di conseguenza $\varphi(v) := Av$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$.

Sia λ un autovalore reale di A e sia v un relativo autovettore (non nullo). Quindi

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

dove la prima uguaglianza segue dall'Osservazione 2.4.1. Pertanto $|\lambda| = 1$ e quindi $\lambda = \pm 1$.

iii) Sia ora e_1 un versore associato a un autovalore reale $\lambda (= \pm 1)$ e si completi e_1 a una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3).$$

Si consideri ora la matrice A' associata a φ rispetto a $\mathcal{B}$, cioè

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi), \quad A' := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi).$$

Per un noto risultato di Algebra Lineare, le matrici A e A' sono simili (tramite una matrice ortogonale) e anche A' è ortogonale e della forma

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}.$$

La mutua ortogonalità tra la prima colonna e le altre implica che $a = 0$ e $b = 0$, in quanto $\lambda \neq 0$. Inoltre i vettori colonna hanno norma 1 ovvero

$$\|(c, e)\| = 1, \quad \|(d, f)\| = 1.$$

Pertanto, tenendo conto che anche la seconda e la terza colonna sono ortogonali tra loro, la matrice in questione è del tipo

$$A' = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in O(2).$$

Quest'ultima è una matrice speciale di tipo R_θ o non speciale di tipo S_θ . Nel primo caso, il teorema è provato. Nel secondo, lasciamo da dimostrare per esercizio che esiste un cambiamento di base (ortonormale) di $\mathbb{R}^3$ per cui A' ha la forma richiesta. $\square$

Enunciamo, senza dimostrarlo, l'analogo risultato per $\mathbb{E}^3$ (Eulero, 1776).

Teorema 2.6.7. (*Classificazione delle isometrie dello spazio euclideo*)

Sia f un'isometria di $\mathbb{E}^3$ espressa, in un riferimento cartesiano ortogonale, da $Y = f(X)$ dove

$$Y = AX + C,$$

con $A \in O(3)$ e $C \in \mathbb{E}^3$. Allora f è uno dei seguenti tipi:

1. traslazione t_v (diretta, senza punti fissi);
2. riflessione ρ_π (inversa, con un piano fisso π che è l'asse della riflessione);
3. rotazione $\sigma_{r,\theta}$ (diretta, con una retta fissa r che è l'asse della rotazione di angolo θ);
4. glissoriflessione $gl_{\pi,v} = t_v \circ \rho_\pi$ (inversa senza punti fissi, con v vettore parallelo a π);
5. glissorotazione $t_v \circ \sigma_{r,\theta}$ (diretta senza punti fissi, con v vettore parallelo a r);
6. riflessione rotatoria $\rho_\pi \circ \sigma_{r,\theta}$ (inversa, con un punto fisso, con r retta ortogonale al piano π).

Capitolo 3

GEOMETRIA PROIETTIVA

(da Wikipedia - Enciclopedia libera)

La geometria proiettiva è la parte della geometria che modella i concetti intuitivi di prospettiva e orizzonte. Definisce e studia gli enti geometrici usuali (punti, rette, ...) senza utilizzare misure o confronto di lunghezze. La geometria proiettiva è la geometria “vista da un occhio”.

La geometria proiettiva può essere pensata informalmente come la geometria che nasce dal collocare il proprio occhio in un punto dello spazio, così che ogni linea che intersechi l’“occhio” appaia solo come un punto. Le grandezze degli oggetti non sono direttamente quantificabili (perché guardando il mondo con un occhio soltanto non abbiamo informazioni sulla profondità) e l’orizzonte è considerato parte integrante dello spazio. Come conseguenza, nella geometria piana proiettiva due rette si intersecano sempre, non esistono quindi due rette parallele e distinte che non hanno punti di intersezione.

Cenni storici

L’origine della geometria proiettiva è legata agli sforzi di un artista e matematico francese, Girard Desargues (1591-1661), che cercava una via alternativa per il disegno in prospettiva, che generalizzasse l’uso dei punti di fuga e includesse il caso in cui questi sono infinitamente lontani. Egli inquadrò quindi la geometria euclidea all’interno di un sistema geometrico più generale.

La geometria proiettiva si sviluppò quindi più ampiamente nella prima metà del diciannovesimo secolo. Storicamente, questo sviluppo può essere letto come un passaggio intermedio tra la geometria analitica (introdotta da Descartes nel XVII secolo) e la geometria algebrica (che occupa un ruolo cruciale nel XX secolo).

Il passaggio dalla geometria analitica a quella proiettiva si effettuò sostituendo le usuali coordinate cartesiane (ad esempio del piano cartesiano) con delle nuove coordinate, dette coordinate omogenee. Tramite queste coordinate, lo spazio (ad esempio, il piano) si arricchì di alcuni “punti all’infinito”, che la geometria proiettiva considera punti a tutti gli effetti, indistinguibili dai punti “finiti” (da cui il carattere omogeneo del nuovo spazio, in cui tutti i punti hanno lo stesso ruolo).

I matematici del XIX secolo si resero conto che in questo nuovo contesto “omogeneo” molti teoremi risultavano più semplici ed eleganti: questo grazie alla scomparsa di molti “casi eccezionali”, generati da configurazioni particolari (quali ad esempio quella di due rette parallele nel piano), proprie della geometria euclidea ma assenti nella proiettiva. In particolare lo studio delle curve risultava semplificato nel contesto proiettivo: tramite l’utilizzo dell’algebra lineare vennero classificate le coniche, e matematici come Julius Plücker iniziarono a rappresentare le curve come punti di altri spazi proiettivi, generalmente più grandi.

I matematici che per primi introdussero la geometria proiettiva, tra cui Poncelet e Steiner, non intendevano inizialmente estendere la geometria analitica. Le tecniche di dimostrazione erano inizialmente sintetiche (cioè simili a quelle di Euclide, senza l’ausilio dell’algebra), e lo spazio proiettivo era introdotto su base assiomatica (con assiomi simili a quelli di Euclide). Per questo motivo una riformulazione rigorosa dei lavori di questi matematici in chiave odierna è spesso difficile: anche nel caso più semplice del piano proiettivo, il loro approccio assiomatico comprende anche modelli diversi da quello definito oggi (e non studiabili tramite l’algebra lineare).

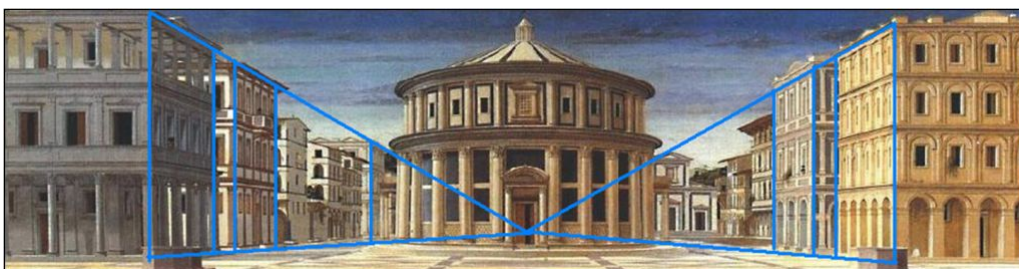
Verso la fine del secolo la scuola italiana (composta tra gli altri da Castelnuovo, Enriques e Severi) uscì dal solco della tradizione finendo per trovarsi ad affrontare nuovi problemi che richiedevano tecniche algebriche sempre più potenti. Nacque quindi la geometria algebrica.



Masolino - *La Guarigione dello storpio e resurrezione di Tabita* (affresco
- Cappella Brancacci - Santa Maria del Carmine, Firenze) 1424-1425



Anonimo - *La città ideale* (Urbino, Galleria Nazionale) 1473 c.



3.1 Spazi proiettivi

Definizione 3.1.1. Sia V un K -spazio vettoriale. Si dice *spazio proiettivo su V* l'insieme $\mathbb{P}(V)$ di tutti i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V . Diciamo che la *dimensione* di $\mathbb{P}(V)$ è

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim_K(V) - 1.$$

In particolare, se $V = \{0_V\}$, allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ e, per convenzione, la sua dimensione è -1 .

Infine diciamo *punti* gli elementi di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 3.1.1. Un modo equivalente per introdurre lo spazio proiettivo è il seguente. Nell'insieme $V \setminus \{0_V\}$ si introduca la seguente relazione:

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : v = \lambda v'.$$

Si prova facilmente ($\textcircled{A}$) che $\sim$ è una relazione d'equivalenza e che le classi d'equivalenza sono le rette vettoriali di V private del vettore nullo.

Si denoti con $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$. E' facile verificare che π induce una biiezione naturale

$$\bar{\pi} : \frac{V \setminus \{0_V\}}{\sim} \longrightarrow \mathbb{P}(V).$$

Identificando quindi i due insiemi, con un leggero abuso di notazione, denoteremo i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ con $P = \langle v \rangle = [v]$ dove $v \in V \setminus \{0_V\}$ (anche se, più precisamente, $[v] = \langle v \rangle \setminus \{0_V\}$).

Definizione 3.1.2. La suddetta applicazione π viene anche detta *proiezione canonica* da uno spazio vettoriale al suo proiettivizzato.

Esempio 3.1.1. Se $\dim_K(V) = 1$ allora $\mathbb{P}(V)$ ha dimensione 0 e consiste di un solo punto.

Definizione 3.1.3. Se $V = K^{n+1}$, denotiamo $\mathbb{P}(K^{n+1})$ con $\mathbb{P}_K^n$ che viene detto *n -spazio proiettivo numerico*. In particolare, $\mathbb{P}_\mathbb{R}^1$ è detta *retta proiettiva reale*, $\mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ è detto *piano proiettivo reale*, ecc.

I punti di $\mathbb{P}_K^n$, che sono del tipo $[(x_0, \dots, x_n)]$, con $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, vengono denotati semplicemente con $[x_0, \dots, x_n]$.

Utilizziamo questa notazione anche nel caso generale, introducendo la seguente nozione.

Definizione 3.1.4. Un *sistema di riferimento proiettivo* in $\mathbb{P}(V)$ è la scelta di una base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ dello spazio vettoriale V . In tal modo, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n, \quad (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Diciamo dunque che gli $n+1$ scalari $x_0, \dots, x_n$ sono le *coordinate omogenee* del punto $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo

$$P = [x_0, \dots, x_n].$$

Osservazione 3.1.2. Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di una costante non nulla di proporzionalità. Infatti, si considerino i vettori non nulli di V :

$$v = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n, \quad v' = \lambda v = \lambda x_0 e_0 + \dots + \lambda x_n e_n, \quad \lambda \neq 0.$$

Chiaramente $v \sim v'$, cioè $[v] = [v']$ e quindi ne segue che

$$[x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n].$$

Quindi uno stesso punto ha infinite $(n+1)$ -uple di coordinate omogenee, tutte proporzionali.

Come conseguenza, due basi proporzionali di V individuano lo stesso riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ e dunque ogni punto ha le stesse coordinate omogenee in entrambi i riferimenti.

Dalla definizione di sistema di riferimento proiettivo si ha immediatamente il seguente risultato, che enunciamo per semplicità per gli spazi proiettivi numerici.

Proposizione 3.1.1. Siano dati in $\mathbb{P}_K^n$ due riferimenti proiettivi associati alle basi $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$ dello spazio vettoriale K^{n+1} . Sia $P \in \mathbb{P}_K^n$ avente per coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $[x'_0, \dots, x'_n]$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Si denotino i vettori di tali coordinate con

$$X := {}^t(x_0, \dots, x_n), \quad X' := {}^t(x'_0, \dots, x'_n) \in K^{n+1}.$$

Se $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è la matrice di cambio di base avente sulle colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$ allora si ha

$$X' = \lambda A X, \quad \lambda \in K.$$

Esempio 3.1.2. Siano dati i riferimenti proiettivi in $\mathbb{P}^2$ associati alle due basi $\mathcal{B} = ((1, 2, 3), (0, 1, -1), (0, 1, 1))$ e a quella canonica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Se $P \in \mathbb{P}^2$ ha coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ rispetto a $\mathcal{B}$, determinare

le sue coordinate omogenee $[x'_0, x'_1, x'_2]$ rispetto a $\mathcal{E}$.

Chiaramente

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi, esplicitando la relazione $X' = \lambda AX$, si ottiene

$$\begin{cases} x'_0 &= \lambda x_0 \\ x'_1 &= \lambda(2x_0 + x_1 + x_2) \\ x'_2 &= \lambda(3x_0 - x_1 + x_2) \end{cases}.$$

Pertanto le coordinate omogenee di P rispetto a $\mathcal{E}$ sono

$$[x'_0, x'_1, x'_2] = [x_0, 2x_0 + x_1 + x_2, 3x_0 - x_1 + x_2].$$

Un sistema di riferimento proiettivo non ha un punto che svolga le funzioni di “origine” (anche perché non esiste il punto che ha tutte le coordinate omogenee nulle). Tuttavia ci sono alcuni punti particolari.

Definizione 3.1.5. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, dotato di riferimento proiettivo $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$, diciamo *punti fondamentali* i seguenti:

$$E_0 := [e_0] = [1, 0, \dots, 0], \dots, E_n := [e_n] = [0, 0, \dots, 1].$$

Diciamo inoltre *punto unità* quello definito da

$$U := [1, 1, \dots, 1].$$

Esempio 3.1.3. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ ci sono due punti fondamentali $E_0 = [1, 0]$, $E_1 = [0, 1]$ e il punto unità $U = [1, 1]$.

Nel piano $\mathbb{P}^2$ i tre punti fondamentali sono $E_0 = [1, 0, 0]$, $E_1 = [0, 1, 0]$, $E_2 = [0, 0, 1]$ e il punto unità $U = [1, 1, 1]$.

Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ i punti fondamentali sono quattro e precisamente $E_0 = [1, 0, 0, 0]$, $E_1 = [0, 1, 0, 0]$, $E_2 = [0, 0, 1, 0]$, $E_3 = [0, 0, 0, 1]$, mentre il punto unità è $U = [1, 1, 1, 1]$.

Definizione 3.1.6. Se W è un sottospazio non nullo di V , diciamo che $\pi(W \setminus \{0_V\})$ è un *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ e lo denoteremo con $\mathbb{P}(W)$. Diremo *dimensione* di $\mathbb{P}(W)$ il numero non negativo

$$\dim \mathbb{P}(W) := \dim_K W - 1$$

e *codimensione* di $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$ il numero non negativo

$$\text{codim } \mathbb{P}(W) := \dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W).$$

In particolare, si dicono *iperpiani* i sottospazi proiettivi di codimensione 1, *rette* quelli di dimensione 1, *piani* quelli di dimensione 2.

Proposizione 3.1.2. *Se U e W sono sottospazi vettoriali di V allora*

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W).$$

In particolare, $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \emptyset$ se e solo se $U \cap W = \{0_V\}$. Conseguentemente, l'intersezione di sottospazi proiettivi, se non vuota, è un sottospazio proiettivo.

Dimostrazione. Immediata, dalla costruzione dello spazio proiettivo secondo l'Osservazione 3.1.1 e dalle proprietà (insiemistiche) delle applicazioni. $\square$

Ricordiamo la relazione di Grassmann per sottospazi vettoriali.

Teorema 3.1.3. *Sia V un K -spazio vettoriale e U, W suoi sottospazi vettoriali. Allora*

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

Da tale relazione si deduce l'analogo risultato per sottospazi proiettivi.

Teorema 3.1.4. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)$ suoi sottospazi proiettivi. Allora*

$$\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Dimostrazione. Basta osservare che $\dim \mathbb{P}(U + W) = \dim_K(U + W) - 1$, $\dim \mathbb{P}(U) = \dim_K(U) - 1$, $\dim \mathbb{P}(W) = \dim_K(W) - 1$ e, infine, che

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) = \dim(\mathbb{P}(U \cap W)) = \dim_K(U \cap W) - 1,$$

dove la prima uguaglianza segue dalla Proposizione 3.1.2. Si conclude applicando il Teorema 3.1.3. $\square$

Se l'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo, questo non è vero per l'unione. La nozione corrispondente è la seguente.

Definizione 3.1.7. Sia X un qualunque sottoinsieme non vuoto (finito o infinito) di $\mathbb{P}(V)$. L'insieme

$$L(X) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \supseteq X} \mathbb{P}(W)$$

si dice *sottospazio proiettivo generato da X* .

Esercizio P1. Provare che $\mathbb{P}(U + W) = L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$.

Alla luce di questa uguaglianza, il Teorema precedente si può riformulare come segue:

$$\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) = \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - \dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)).$$

Osservazione 3.1.3. Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, si ha $\dim L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) \leq n$. Pertanto la relazione precedente implica

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq \dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) - n.$$

In particolare, se $\dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) \geq n$ allora necessariamente

$$\dim(\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) \geq 0,$$

dunque i due sottospazi sono incidenti.

Dall'Osservazione precedente discendono alcuni importanti fatti sulla posizione reciproca di sottospazi *nello spazio proiettivo*.

Esempio 3.1.4. Consideriamo due rette r e s in $\mathbb{P}^2$. Per quanto visto

$$\dim r + \dim s = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(r \cap s) \geq 0.$$

Pertanto due rette distinte del piano proiettivo sono sempre incidenti. Analoga considerazione vale per due piani π e σ in $\mathbb{P}^3$ e precisamente

$$\dim(\pi \cap \sigma) \geq \dim \pi + \dim \sigma - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Pertanto due piani distinti nello spazio proiettivo sono sempre incidenti in una retta. Infine, se r è una retta e π è un piano in $\mathbb{P}^3$, applicando ancora l'Osservazione precedente si ha

$$\dim(\pi \cap r) \geq \dim \pi + \dim r - \dim \mathbb{P}^3 = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Chiaramente $\dim(\pi \cap r)$ può essere solo 0 o 1. Nel primo caso la retta e il piano si intersecano in un solo punto; nel secondo $r \subset \pi$.

Un'importante fatto è che non esiste la nozione di parallelismo tra sottospazi proiettivi (non essendoci quella di "giacitura"). Dunque due sottospazi proiettivi possono essere soltanto incidenti o non incidenti. Si tratterà, di volta in volta, di studiare la loro eventuale intersezione.

3.2 Equazioni cartesiane

Un iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(W)$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ corrisponde a un iperpiano vettoriale $W \subset V$ e, come abbiamo visto nel Capitolo 1 (Definizione 1.5.1), W ha una equazione cartesiana (una volta fissata una base di V) del tipo

$$W : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$$

dove $a_i \in K$ per ogni i . È naturale chiedersi se tale equazione definisce anche $\mathbb{P}(W)$, una volta fissato un riferimento proiettivo. La risposta è affermativa. Infatti $P = [\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n] \in \mathbb{P}(W)$ se e solo se $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n) \in W$ se e solo se $a_0\bar{x}_0 + \cdots + a_n\bar{x}_n = 0$.

Si osservi infine che tale verifica non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee di P . Infatti, $P = [\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n] = [\lambda\bar{x}_0, \dots, \lambda\bar{x}_n]$ (per ogni $\lambda \neq 0$) e ovviamente si ha

$$a_0\bar{x}_0 + \cdots + a_n\bar{x}_n = 0 \iff \lambda a_0\bar{x}_0 + \cdots + \lambda a_n\bar{x}_n = 0.$$

Possiamo dunque dire che

$$\mathbb{P}(W) : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$$

è una *equazione cartesiana* dell'iperpiano $\mathbb{P}(W)$.

Esempio 3.2.1. Un iperpiano in $\mathbb{P}^2$ è una retta e dunque ha equazione

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Un iperpiano in $\mathbb{P}^3$ è un piano e dunque ha equazione

$$\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

In $\mathbb{P}^n$ si dicono *iperpiani coordinati* quelli le cui equazioni, in un fissato riferimento proiettivo, sono le seguenti:

$$H_0 : x_0 = 0, \quad H_1 : x_1 = 0, \quad \dots, \quad H_n : x_n = 0.$$

È chiaro che ogni iperpiano coordinato H_i contiene tutti i punti fondamentali eccetto E_i e, ovviamente, U non appartiene a nessuno degli iperpiani coordinati.

Quanto visto per l'equazione cartesiana di un iperpiano si generalizza a un sottospazio di qualunque dimensione.

Definizione 3.2.1. Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n in cui si è fissato un riferimento proiettivo e siano $[x_0, \dots, x_n]$ le sue coordinate omogenee. Se $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, posta s la sua codimensione, una *equazione cartesiana* di $\mathbb{P}(W)$ è un sistema lineare omogeneo che è equazione cartesiana di W in V , cioè del tipo

$$\mathbb{P}(W) : AX = 0$$

dove $A \in K^{s, n+1}$, $\text{rk}(A) = s$ e $X = {}^t(x_0, \dots, x_n)$. Esplicitamente:

$$\mathbb{P}(W) : \begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{s0}x_0 + a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Osservazione 3.2.1. Dalla definizione precedente, è chiaro che ogni sottospazio proiettivo è intersezione di un numero finito di iperpiani proiettivi.

Esempio 3.2.2. L'equazione cartesiana di una retta in $\mathbb{P}^3$ è, ad esempio,

$$r : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Quella di un piano in $\mathbb{P}^4$ è, ad esempio,

$$\pi : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

Quella di una retta in $\mathbb{P}^4$ è, ad esempio,

$$s : \begin{cases} 3x_0 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_0 - x_1 + 4x_2 + 5x_4 & = & 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

(Quest'ultima equazione rappresenta effettivamente una retta... ).

Ricordando la nozione di sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione 3.1.7), se in particolare $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ è costituito da un numero finito di punti, allora

$$L(P_1, \dots, P_s) := \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Corollario 3.2.1. Siano $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ punti distinti, dove $P_i = [v_i]$ e $v_i \in V$, per $i = 1, \dots, s$. Allora

$$L(P_1, \dots, P_s) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle).$$

In particolare, $\dim L(P_1, \dots, P_s) \leq s - 1$.

Dimostrazione. Per definizione $L(P_1, \dots, P_s)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W)$ contenenti i punti $P_1, \dots, P_s$:

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s} \mathbb{P}(W).$$

Chiaramente $\mathbb{P}(W) \ni P_1, \dots, P_s$ se e solo se $W \ni v_1, \dots, v_s$; quindi

$$L(P_1, \dots, P_s) = \bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{W \ni v_1, \dots, v_s} W \right) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_s \rangle)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla Proposizione 3.1.2 e l'ultima dalla definizione di sottospazio vettoriale generato da certi vettori. $\square$

Con le notazioni del Corollario precedente, $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$ se e solo se $v_1, \dots, v_s$ sono vettori linearmente indipendenti.

Definizione 3.2.2. I punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ si dicono (*proiettivamente*) *indipendenti* se $\dim L(P_1, \dots, P_s) = s - 1$.

E' chiaro che il massimo numero di punti indipendenti in $\mathbb{P}^n$ è $n + 1$. Tuttavia si può richiedere un simile requisito di "indipendenza" a un numero maggiore di punti. Per questo diamo la seguente nozione.

Definizione 3.2.3. Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, diciamo che i punti $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{P}(V)$ sono in *posizione generale* in uno dei seguenti casi:

- se $s \leq n + 1$ e $P_1, \dots, P_s$ sono proiettivamente indipendenti;
- se $s > n + 1$ e $P_1, \dots, P_s$ sono a $n + 1$ a $n + 1$ indipendenti (cioè ogni loro sottoinsieme di $n + 1$ punti è costituito da punti indipendenti).

Esempio 3.2.3. In $\mathbb{P}^2$ consideriamo s punti distinti. Se $s = 2$, allora i punti sono ovviamente indipendenti e quindi in posizione generale. Se $s = 3$, allora P_1, P_2, P_3 sono indipendenti se $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, dunque se e solo se i tre punti non appartengono a una stessa retta (in tal caso, infatti, sarebbe $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$: $\textcircled{\times}$). Anche in questo caso, indipendenti equivale a essere in posizione generale.

Se $s = 4$, allora P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale se mai tre di essi sono dipendenti, cioè mai tre di essi sono allineati.

La stessa condizione caratterizza gli insiemi di s punti in posizione generale, con $s \geq 4$.

Esempio 3.2.4. In $\mathbb{P}^n$ gli $n + 2$ punti $E_0, \dots, E_n, U$ sono in posizione generale. Per verificarlo, consideriamo tutti i loro sottoinsiemi di $n + 1$ elementi. I punti $E_0, \dots, E_n$ sono proiettivamente indipendenti, in quanto

$$\dim L(E_0, E_1, \dots, E_n) = \dim_K \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle - 1 = \dim_K K^{n+1} - 1 = n.$$

Gli altri sottoinsiemi sono costituiti da U e da n tra gli E_i . Ad esempio, calcoliamo

$$\dim L(U, E_1, \dots, E_n) = \dim_K \langle u, e_1, \dots, e_n \rangle - 1.$$

Si vede facilmente che i vettori $u, e_1, \dots, e_n \in K^{n+1}$ sono linearmente indipendenti, ad esempio scrivendo le loro $n+1$ componenti in una matrice e osservando che essa ha determinante non nullo. Pertanto anch'essi generano tutto K^{n+1} e quindi si ha quanto affermato.

Questo esempio è, in qualche senso, generalizzato dal seguente risultato.

Teorema 3.2.2. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e siano $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ punti in posizione generale. Allora esiste un unico riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ nel quale $P_0, \dots, P_n$ sono i punti fondamentali e P_{n+1} è il punto unità.*

Dimostrazione. Siano $P_i = [v_i]$ per $i = 0, 1, \dots, n+1$, per opportuni $v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \in V$.

Per ipotesi $P_0, \dots, P_n$ sono punti proiettivamente indipendenti, quindi i vettori $v_0, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e dunque una base di V .

Di conseguenza esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Si osservi che tutti i λ_i sono non nulli. Infatti, se uno di essi fosse nullo, e.g. $\lambda_0 = 0$, si avrebbe $v_{n+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e quindi $v_1, \dots, v_{n+1}$ sarebbero linearmente dipendenti. Di conseguenza, i punti $P_1, \dots, P_{n+1}$ sarebbero proiettivamente dipendenti, contro l'ipotesi sulla posizione generale.

Sia $\mathcal{B} = (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$: per quanto appena osservato, $\mathcal{B}$ è una base di V e dunque un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. In tale riferimento i punti dati hanno coordinate

$$\begin{aligned} P_0 = [v_0] &= [\lambda_0 v_0] = [1, 0, \dots, 0] \\ &\vdots \\ P_n = [v_n] &= [\lambda_n v_n] = [0, 0, \dots, 1] \end{aligned} \quad .$$

$$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n] = [1, 1, \dots, 1]$$

Pertanto, in tale riferimento, i punti dati sono, rispettivamente, i punti fondamentali e il punto unità. $\square$

3.3 Equazioni parametriche

Esprimere un sottospazio proiettivo come generato da un insieme di punti indipendenti fornisce un'ulteriore tipo di equazione.

Sia S un qualunque sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, dove $\dim_K V = n + 1$. Per definizione, $S = \mathbb{P}(W)$, dove W è un sottospazio vettoriale di V .

Posta $\dim_K W = s + 1$, con $s \leq n$, possiamo scrivere $W = \langle w_0, \dots, w_s \rangle$, per opportuni vettori (linearmente indipendenti) $w_0, \dots, w_s \in V$.

Infine, ponendo $P_i = [w_i]$, per $i = 0, \dots, s$, per il Corollario 3.2.1

$$S = \mathbb{P}(W) = L(P_0, \dots, P_s)$$

Pertanto

$$Q \in S \iff Q = [v], v \in W \setminus \{0_V\} \iff Q = [\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_s w_s] \quad (3.1)$$

con $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in K$ non tutti nulli.

Si fissi ora una base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ di V e di conseguenza un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$. Esprimendo i vettori $w_0, \dots, w_s$ sulla base $\mathcal{B}$ si individuano $(s + 1) \times (n + 1)$ scalari (a_{ij}) :

$$\begin{cases} w_0 &= a_{00}e_0 + \dots + a_{0n}e_n \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ w_s &= a_{s0}e_0 + \dots + a_{sn}e_n \end{cases}.$$

Moltiplicando ogni equazione per lo scalare λ_i corrispondente si ha

$$\begin{cases} \lambda_0 w_0 &= \lambda_0 a_{00}e_0 + \dots + \lambda_0 a_{0n}e_n \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_s w_s &= \lambda_s a_{s0}e_0 + \dots + \lambda_s a_{sn}e_n \end{cases}.$$

A questo punto, possiamo esprimere estesamente le coordinate omogenee del punto $[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_s w_s]$ e, per comodità grafica, le scriviamo in verticale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_s a_{sn} \end{bmatrix}.$$

Se Q è il generico punto di $\mathbb{P}(V)$ di coordinate omogenee $Q = [x_0, \dots, x_n]$, l'equivalenza (3.1) diventa

$$Q \in S \iff \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots \\ \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_s a_{sn} \end{bmatrix}.$$

Questa uguaglianza tra coordinate omogenee significa l'uguaglianza delle componenti *a meno di un fattore di proporzionalità*. Tuttavia, convenzionalmente, si omette questa costante non nulla nella scrittura che esprime le coordinate omogenee del generico punto Q di S .

Infine si osservi che le componenti di w_i sulla base $\mathcal{B}$ sono, per definizione, le coordinate omogenee del punto P_i , per ogni $i = 0, \dots, s$.

Abbiamo pertanto provato il seguente risultato

Proposizione 3.3.1. *Sia $S = L(P_0, \dots, P_s) \subseteq \mathbb{P}(V)$ il sottospazio proiettivo generato dai punti indipendenti $P_0, \dots, P_s$ aventi coordinate omogenee (in un fissato riferimento proiettivo)*

$$P_0 = [a_{00}, \dots, a_{0n}], \quad \dots, \quad P_s = [a_{s0}, \dots, a_{sn}].$$

Allora S è costituito da tutti e soli i punti di coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ che verificano

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda_0 a_{00} + \dots + \lambda_s a_{s0} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= \lambda_0 a_{0n} + \dots + \lambda_s a_{sn} \end{cases} \quad (3.2)$$

al variare dei parametri $\lambda_i \in K$, non tutti nulli.

Definizione 3.3.1. L'espressione (3.2) si dice *equazione parametrica* del sottospazio proiettivo S .

Essendo $P_0, \dots, P_s$ dei punti proiettivamente indipendenti, $\dim S = s$.

Esempio 3.3.1. In $\mathbb{P}^2$ i punti (indipendenti in quanto distinti) $P_0 = [1, 2, 3]$ e $P_1 = [-1, 5, 7]$ generano un sottospazio proiettivo S di dimensione 1, cioè una retta. La sua equazione parametrica è

$$S : \begin{cases} x_0 &= \lambda_0 - \lambda_1 \\ x_1 &= 2\lambda_0 + 5\lambda_1 \\ x_2 &= 3\lambda_0 + 7\lambda_1 \end{cases}.$$

In generale, in $\mathbb{P}^n$ la retta per due punti $A = [a_0, \dots, a_n]$ e $B = [b_0, \dots, b_n]$ ha equazione parametrica

$$S : \begin{cases} x_0 &= \lambda a_0 + \mu b_0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}.$$

Esempio 3.3.2. In $\mathbb{P}^3$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ consideriamo i 3 punti (indipendenti) $A = [1, 2, 3, 4]$, $B = [-1, 5, 7, 0]$, $C = [2, 0, 1, 1]$.

Essi generano un sottospazio proiettivo π di dimensione 2, cioè un piano. La sua equazione parametrica è

$$\pi : \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu + 2\nu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu + \nu \\ x_3 &= 4\lambda + \nu \end{cases}.$$

Per passare dall'equazione parametrica a quella cartesiana di un sottospazio proiettivo $S = \mathbb{P}(W)$ si può procedere in 2 modi: o eliminare i parametri o imporre che il generico vettore $(x_0, \dots, x_n)$ sia combinazione lineare dei generatori di W . Illustriamo entrambe queste procedure nei seguenti esempi.

Esempio 3.3.3. Consideriamo la retta $S \subset \mathbb{P}^2$ vista nell'Esempio 3.3.1:

$$S : \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu \end{cases}.$$

Eliminiamo λ attraverso (ad esempio) la prima equazione e sostituendo nelle restanti si ha:

$$S : \begin{cases} \lambda &= x_0 + \mu \\ x_1 &= 2(x_0 + \mu) + 5\mu \\ x_2 &= 3(x_0 + \mu) + 7\mu \end{cases}.$$

Poi si elimina μ attraverso (ad esempio) la seconda equazione e si sostituisce nella terza:

$$S : \begin{cases} \lambda &= x_0 + \mu \\ \mu &= (x_1 - 2x_0)/7 \\ x_2 &= 3x_0 + 10\mu \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3x_0 + 10(x_1 - 2x_0)/7$$

e quindi

$$S : x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0.$$

Esempio 3.3.4. Consideriamo ancora la retta $S \subset \mathbb{P}^2$ vista nell'Esempio 3.3.1 e imponiamo che (x_0, x_1, x_2) sia combinazione lineare dei vettori che corrispondono ai due punti dati P_0 e P_1 , cioè $(1, 2, 3)$ e $(-1, 5, 7)$. Questo equivale a imporre

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

che porta al risultato dell'esempio precedente.

Esercizio P2. Determinare l'equazione cartesiana del piano π dell'Esempio 3.3.2, partendo dalla sua equazione parametrica (anche in questo caso, basta calcolare il determinante di una matrice che, qui, è 4×4).

Nei due casi precedenti (retta nel piano e piano nello spazio) si tratta di due iperpiani e in entrambi i casi l'equazione cartesiana consiste nell'annullarsi di un determinante. Vediamo un esempio più generale.

Esempio 3.3.5. Sia $r \subset \mathbb{P}^3$ la retta generata dai punti $A = [1, 2, 3, 4]$ e $B = [-1, 5, 7, 0]$. Vogliamo determinarne l'equazione parametrica e quella cartesiana. Per quanto visto,

$$r : \begin{cases} x_0 &= \lambda - \mu \\ x_1 &= 2\lambda + 5\mu \\ x_2 &= 3\lambda + 7\mu \\ x_3 &= 4\lambda \end{cases}.$$

Lasciamo per esercizio l'eliminazione dei 2 parametri λ e μ .

Vediamo invece come procedere nel secondo modo. Imponiamo che il vettore (x_0, x_1, x_2, x_3) sia combinazione lineare dei vettori $(1, 2, 3, 4)$ e $(-1, 5, 7, 0)$ o, equivalentemente, che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Questo equivale a richiedere che i 4 minori 3×3 siano degeneri. Ma per il *Teorema dei minori orlati* (Capitolo 1, Proposizione 1.12.4) è sufficiente considerare i due minori 3×3 contenenti, ad esempio, le prime 2 colonne e quindi porre

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 = 0$$

ottenendo

$$r : \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 &= 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 &= 0 \end{cases}.$$

Per passare dall'equazione cartesiana, data da un sistema lineare omogeneo $AX = 0$, a quella parametrica di un sottospazio proiettivo S , è sufficiente *risolvere* tale sistema lineare. La forma esplicita della sua generica soluzione dipende da alcune incognite libere che svolgono dunque il ruolo di parametri; tale espressione è esattamente un'equazione parametrica di S .

3.4 Fasci di iperpiani

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo le corrispondenti nozioni negli spazi proiettivi. Come vedremo, la situazione è semplificata, o meglio c'è un'unica nozione di fascio.

Definizione 3.4.1. Se $P \in \mathbb{P}^2$, diciamo *fascio di rette di centro P* l'insieme Φ_P di tutte e sole le rette del piano passanti per P .

La dimostrazione del seguente risultato è del tutto analoga a quella vista nel piano affine.

Proposizione 3.4.1. *Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$, siano P un punto, $r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e $s : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ due rette distinte per P . Allora il fascio di rette di centro P è dato da*

$$\Phi_P : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Se si esprime Φ_P con la precedente equazione, le rette r e s si dicono ancora *generatori* del fascio. Il loro ruolo può essere attribuito a una qualunque coppia di rette distinte di Φ_P .

Osservazione 3.4.1. Si noti che la scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ è del tutto equivalente a quella usata nel caso affine: $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ovviamente, non si era utilizzata in quel contesto solo perché non si erano ancora introdotti gli spazi proiettivi.

Osservazione 3.4.2. La scrittura $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ ha un evidente vantaggio: permette di stabilire chiaramente una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ_P e i punti di $\mathbb{P}^1$. Infatti si verifica facilmente che, posta $r_{\lambda, \mu}$ la retta di Φ_P di equazione $\lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0$, l'applicazione

$$\Phi_P \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad r_{\lambda, \mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Questo dà un significato preciso all'espressione “un fascio di rette nel piano è costituito da ∞^1 rette”.

Esempio 3.4.1. Determiniamo il fascio di rette Φ_P dove $P = [1, 2, 3] \in \mathbb{P}^2$. Per fare questo, basta determinarne due generatori. Ad esempio,

$$r : 3x_0 - x_2 = 0, \quad s : 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Dunque

$$\Phi_P : \lambda(3x_0 - x_2) + \mu(3x_1 - 2x_2) = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1.$$

Come visto per lo spazio affine, è naturale definire la seguente nozione e il relativo risultato.

Definizione 3.4.2. Se $r \subset \mathbb{P}^3$ è una retta, diciamo *fascio di piani di sostegno r* l'insieme $\mathcal{F}_r$ di tutti e soli i piani dello spazio contenenti r .

Proposizione 3.4.2. In $\mathbb{P}^3$ con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino la retta r e i due piani distinti $\pi : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ e $\sigma : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ contenenti r . Allora il fascio di piani di sostegno r è dato da

$$\mathcal{F}_r : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Con ovvie notazioni, posto $\pi_{\lambda, \mu}$ il generico piano del precedente fascio, si ha che l'applicazione

$$\mathcal{F}_r \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{data} \quad \pi_{\lambda, \mu} \mapsto [\lambda, \mu]$$

è ben definita e biunivoca. Quindi, anche in questo caso, possiamo dire che un fascio di piani nello spazio è costituito da ∞^1 piani.

Esempio 3.4.2. Determinare tutti i piani di $\mathbb{P}^3$ passanti per i punti $A = [1, 2, 3, 4]$ e $B = [-1, 5, 7, 0]$.

Chiaramente i piani richiesti sono tutti e soli quelli del fascio $\mathcal{F}_r$ di sostegno la retta r passante per A e B . Tale retta, determinata nell'Esempio 3.3.5, è

$$r : \begin{cases} x_0 + 10x_1 - 7x_2 = 0 \\ 20x_0 + 4x_1 - 7x_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi

$$\mathcal{F}_r : \lambda(x_0 + 10x_1 - 7x_2) + \mu(20x_0 + 4x_1 - 7x_3) = 0.$$

Si osservi che abbiamo dato un'unica nozione di fascio (sia di rette che di piani) senza distinguere tra “propri” e “impropri”. La ragione sarà chiara nel prossimo paragrafo.

Quanto visto si può generalizzare in uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, osservando che il *luogo base* (cioè l'insieme dei punti comuni a tutti i sottospazi del fascio) è un punto, nel caso delle rette di $\mathbb{P}^2$, e una retta, nel caso dei piani di $\mathbb{P}^3$. In entrambe le situazioni si tratta di un sottospazio proiettivo di codimensione 2.

Definizione 3.4.3. Sia $L \subset \mathbb{P}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione $n - 2$ (i.e. di codimensione 2). Diciamo *fascio di iperpiani di sostegno* L l'insieme $\mathcal{F}_L$ di tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ contenenti L .

Proposizione 3.4.3. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ con coordinate $[x_0, \dots, x_n]$, si consideri il sottospazio proiettivo di codimensione 2 avente equazione cartesiana

$$L : \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0 \end{cases}.$$

Allora il fascio di iperpiani di sostegno L è dato da

$$\mathcal{F}_L : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_nx_n) = 0$$

al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Esempio 3.4.3. Determinare tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}^4$ contenenti il sottospazio proiettivo $L = \mathbb{P}(W)$, dove W è il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 0, 0) \rangle.$$

Si verifica che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$ ($\textcircled{A}$). Di conseguenza, $\dim L = 2$ e quindi $\text{codim } L = 2$, pertanto gli iperpiani richiesti costituiscono il fascio $\mathcal{F}_L$ di iperpiani di $\mathbb{P}^4$ avente per sostegno L .

Troviamo l'equazione cartesiana di L col metodo descritto nell'Esempio 3.3.5, cioè imponiamo che il vettore $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia combinazione lineare dei generatori di W ovvero che

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Per il *Teorema dei minori orlati*, basta orlare un minore non degenere 3×3 , ad esempio quello costituito dalle colonne 1 – 3 – 5 (intersecate con le righe 2-3-4): i minori *orlanti* saranno dunque costituiti, rispettivamente, dalle colonne 1 – 2 – 3 – 5 e 1 – 3 – 4 – 5. I loro determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x_0 - x_1 - 2x_2, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x_3.$$

Quindi

$$L : \begin{cases} 2x_0 - x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\mathcal{F}_L : \lambda(2x_0 - x_1 - 2x_2) + \mu x_3 = 0.$$

3.5 Completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$

In questo paragrafo useremo queste notazioni: $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_K^n$, $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}_K^n$, dove K è un campo.

Definizione 3.5.1. Gli $n + 1$ iperpiani di $\mathbb{P}^n$

$$H_i : \quad x_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

sono detti *iperpiani coordinati*.

Osservazione 3.5.1. Ogni spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ con coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ può essere scritto come la seguente unione (disgiunta):

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0,$$

dove

$$H_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}, \quad U_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}.$$

Ovviamente H_0 è il primo iperpiano coordinato.

Osservazione 3.5.2. La precedente decomposizione di $\mathbb{P}^n$ può essere generalizzata a ogni iperpiano coordinato, cioè possiamo scrivere

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i,$$

dove

$$H_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\}, \quad U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

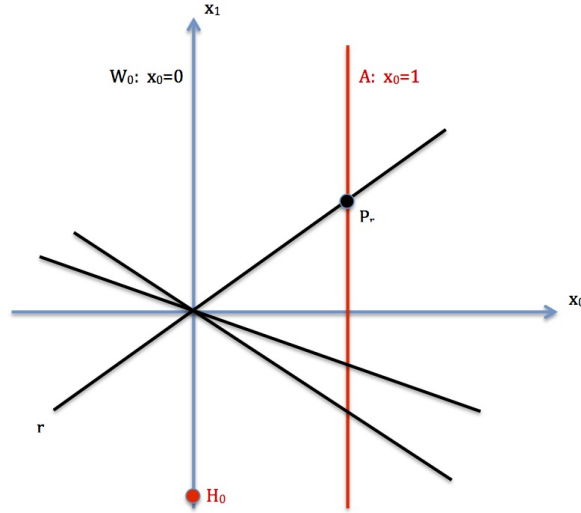
Considerando, ad esempio, la decomposizione $\mathbb{P}^n = H_0 \cup U_0$, mostriamo come costruire una corrispondenza biunivoca “naturale” tra U_0 e $\mathbb{A}^n$ nei casi $n = 1$, $n = 2$ e per n qualunque.

A tale scopo, si considereranno contemporaneamente $\mathbb{P}^n$ e il corrispondente spazio vettoriale K^{n+1} , tenendo presente che ogni iperpiano di $\mathbb{P}^n$ è il proiettivizzato di un iperpiano vettoriale di K^{n+1} . In particolare, l'iperpiano $H_0 \subset \mathbb{P}^n$ è il proiettivizzato dell'iperpiano $W_0 \subset K^{n+1}$, che ha anche esso equazione $x_0 = 0$.

Completamento da $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{P}^1$

In questo caso, H_0 è il punto $[0, 1] \in \mathbb{P}^1$. In K^2 si considerino i seguenti sottoinsiemi $W_0 : x_0 = 0$ (retta vettoriale) e $A : x_0 = 1$ (retta affine). Ogni retta vettoriale $r = \langle v \rangle = [v] \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ interseca la retta A in uno e un solo punto, che denotiamo con P_r . Questo definisce l'applicazione

$$\alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^2 \quad \text{data da} \quad r \mapsto P_r := r \cap A.$$



Chiaramente α è biunivoca e, essendo la prima coordinata di ogni punto $r \in \mathbb{P}^1 \setminus H_0$ non nulla, è definita da

$$r = [v_0, v_1] = \left[1, \frac{v_1}{v_0}\right] \quad \mapsto \quad P_r = \left(1, \frac{v_1}{v_0}\right) \in A.$$

Inoltre, definiamo la naturale applicazione (biunivoca)

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad (1, t) \mapsto t.$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1] \mapsto \frac{v_1}{v_0}$$

è ancora biunivoca e possiamo considerare la sua inversa che denotiamo con

$$j_0 : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad t \mapsto [1, t].$$

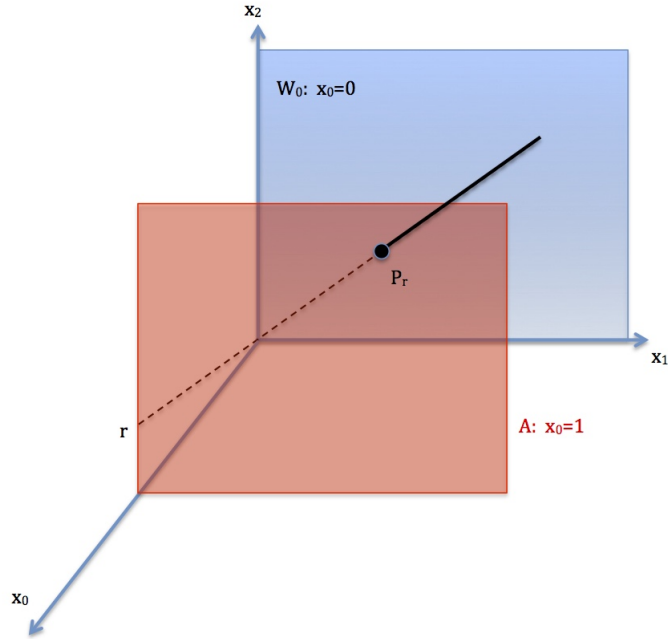
Tenendo conto delle notazioni introdotte nell'Osservazione 3.5.1, è chiaro che $j_0(\mathbb{A}^1) = U_0$ e si ha dunque

$$\mathbb{P}^1 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^1).$$

Definizione 3.5.2. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^1$ e che H_0 è il *punto all'infinito* di $\mathbb{A}^1$ (via l'immersione j_0).

Completamento da $\mathbb{A}^2$ a $\mathbb{P}^2$

In K^3 consideriamo il piano vettoriale $W_0 : x_0 = 0$ e il piano $A : x_0 = 1$



Si osservi che $H_0 = \mathbb{P}(W_0)$ e definiamo, come prima, l'applicazione biunivoca

$$\alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow A \subset K^3$$

definita da

$$r = [v_0, v_1, v_2] \mapsto P_r := r \cap A = \left(1, \frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

e anche l'applicazione (biunivoca)

$$\beta : A \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad (1, t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_2).$$

Pertanto la composizione

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \quad \text{data da} \quad [v_0, v_1, v_2] \mapsto \left(\frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_0}\right)$$

è ancora biunivoca. Si consideri la sua inversa

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus H_0 \quad \text{dove} \quad (t_1, t_2) \mapsto [1, t_1, t_2].$$

Si ha dunque

$$\mathbb{P}^2 = H_0 \cup U_0 = H_0 \cup j_0(\mathbb{A}^2)$$

In questo caso l'iperpiano H_0 è una retta.

Definizione 3.5.3. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^2$ e che H_0 è la *retta all'infinito* o *retta impropria* di $\mathbb{A}^2$ (via l'immersione j_0). I suoi punti si dicono *punti impropri*.

Completamento da $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$

Quanto visto si generalizza naturalmente a una dimensione qualunque col seguente risultato la cui dimostrazione (una semplice verifica) è lasciata al lettore.

Proposizione 3.5.1. *Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^n$ con coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ e lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, \dots, x_n]$.*

L'applicazione

$$j_0 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_0 = U_0$$

definita da

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [1, y_1, \dots, y_n]$$

è biunivoca e la sua inversa

$$j_0^{-1} : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

è definita da

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Definizione 3.5.4. Diciamo che U_0 è una *carta affine* di $\mathbb{P}^n$ e che H_0 è *l'iperpiano all'infinito* di $\mathbb{A}^n$ (via j_0).

Osservazione 3.5.3. Tenendo conto dell'Osservazione 3.5.2, operando come nella costruzione appena vista, si possono introdurre le analoghe applicazioni biunivoche $j_1, j_2, \dots, j_n$

$$j_i : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H_i = U_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e le corrispondenti carte affini

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\} = j_i(\mathbb{A}^n) \cong \mathbb{A}^n.$$

Quindi

$$\mathbb{P}^n = H_i \cup U_i = H_i \cup j_i(\mathbb{A}^n) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e dunque $\mathbb{A}^n$ si può immergere in $\mathbb{P}^n$ in (almeno!) $n+1$ modi.

Si osservi infine che

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$$

e tale scrittura viene detta *ricoprimento* di $\mathbb{P}^n$ con carte affini (o *atlante affine*).

Osservazione 3.5.4. Nel seguito, utilizzeremo sempre il completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$ mediante j_0 e, identificando in tal modo U_0 con $\mathbb{A}^n$, scriveremo con un leggero abuso di notazione

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n.$$

I punti di $\mathbb{P}^n$ che sono affini si diranno *punti propri* mentre quelli appartenenti all'iperpiano H_0 sono *punti impropri*. In particolare, ogni punto di $\mathbb{A}^n$ ha, oltre alle sue coordinate affini, anche delle coordinate omogenee. Viceversa, ogni punto di $\mathbb{P}^n$ che abbia la prima coordinata omogenea non nulla, ha anche delle coordinate affini.

Il passaggio dalle coordinate affini a quelle omogenee (e viceversa) è determinato dalla Proposizione 3.5.1.

Esempio 3.5.1. Come visto, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup H_0$, dove $H_0 = \{[0, 1]\}$ consiste di un solo punto: il punto all'infinito della retta affine. Inoltre, se $P = (t) \in \mathbb{A}^1$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, t]$.

Viceversa, se $Q = [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^1$. Qui ha coordinata $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)$.

Esempio 3.5.2. Come sopra, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup H_0$, dove la retta all'infinito H_0 ha equazione $x_0 = 0$. Inoltre, se $P = (x, y) \in \mathbb{A}^2$, le sue coordinate omogenee sono $P = [1, x, y]$.

Viceversa, se $Q = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ e $x_0 \neq 0$, allora Q appartiene alla carta affine $U_0 \cong \mathbb{A}^2$. Qui ha coordinate affini $Q = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$.

Chiusura proiettiva

In questa sezione utilizziamo le notazioni introdotte sopra, dunque le coordinate affini $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\mathbb{A}^n$, le coordinate omogenee $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ di $\mathbb{P}^n$ e il completamento

$$\mathbb{P}^n = H_0 \cup \mathbb{A}^n,$$

dove $H_0 : x_0 = 0$.

Definizione 3.5.5. Sia H l'iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di equazione

$$H : a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b = 0.$$

Diciamo *chiusura proiettiva* di H l'iperpiano di $\mathbb{P}^n$ di equazione

$$\overline{H} : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b x_0 = 0.$$

Proposizione 3.5.2. Se H è un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di chiusura proiettiva $\overline{H} \subset \mathbb{P}^n$, allora

$$H = \overline{H} \cap \mathbb{A}^n.$$

Inoltre $H_\infty := \overline{H} \setminus H$ è un sottospazio proiettivo di codimensione 2 in $\mathbb{P}^n$ e precisamente

$$H_\infty = \overline{H} \cap H_0.$$

Dimostrazione. Sia $H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$ e sia $P = (Y_1, \dots, Y_n)$ un punto di H . Dunque vale l'identità $a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n + b = 0$.

D'altra parte, per la Proposizione 3.5.1, le coordinate omogenee di P sono $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ e quindi banalmente soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{H} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + bx_0 = 0$.

Questo prova che $H \subset \overline{H}$ e quindi che $H \subset \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$.

Viceversa, sia $P = (Y_1, \dots, Y_n) \in \overline{H} \cap \mathbb{A}^n$. Dunque le sue coordinate omogenee $[1, Y_1, \dots, Y_n]$ soddisfano l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{H}$, cioè vale l'identità $a_1Y_1 + \cdots + a_nY_n + b = 0$. Questo equivale al fatto che le coordinate affini soddisfano l'equazione di H e quindi $P \in H$.

Resta da provare l'ultima affermazione, cioè che

$$\overline{H} \setminus H = \overline{H} \cap H_0.$$

Si osservi che

$$\overline{H} = \overline{H} \cap \mathbb{P}^n = \overline{H} \cap (\mathbb{A}^n \cup H_0) = (\overline{H} \cap \mathbb{A}^n) \cup (\overline{H} \cap H_0) = H \cup (\overline{H} \cap H_0)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata provata sopra. Pertanto si ha la tesi. $\square$

Come conseguenza si ha dunque la decomposizione

$$\overline{H} = H \cup H_\infty$$

dove H è l'insieme dei punti propri di $\overline{H}$ e H_∞ è l'insieme dei punti impropri di $\overline{H}$.

Definizione 3.5.6. Il sottospazio proiettivo H_∞ è detto *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di H .

Esercizio P3. Siano H un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ e T un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. Provare che, se $H \subset T$, allora $T = \overline{H}$.

Osservazione 3.5.5. Se H è l'iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di equazione

$$H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

allora il suo sottospazio improprio è

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{cases}.$$

Esempio 3.5.3. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^2$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{r} \subset \mathbb{P}^2$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : 3x + 2y - 1 = 0.$$

Per quanto visto

$$\bar{r} : 3x_1 + 2x_2 - x_0 = 0$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{cases} \Rightarrow r_\infty = [0, 2, -3].$$

Esempio 3.5.4. Dato il piano $\pi \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\bar{\pi} \subset \mathbb{P}^3$ e la sua retta impropria π_∞ (in equazione cartesiana e in equazione parametrica), dove

$$\pi : 3x + y - 5z + 3 = 0.$$

Per quanto visto

$$\bar{\pi} : 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_0 = 0$$

$$\pi_\infty : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = -3\lambda + 5\mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Dall'Osservazione 3.5.5 si ha il seguente fatto.

Corollario 3.5.3. *Due iperpiani paralleli H e H' di $\mathbb{A}^n$ hanno lo stesso sottospazio improprio, i.e. $H_\infty = H'_\infty$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, gli iperpiani H e H' hanno equazioni del tipo

$$H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b = 0$$

e

$$H' : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + b' = 0$$

Per l'Osservazione 3.5.5 si ha immediatamente la tesi. $\square$

Proposizione 3.5.4. *Se H è un iperpiano di $\mathbb{A}^n$ di giacitura W allora*

$$H_\infty \cong \mathbb{P}(W).$$

Dimostrazione. Se $H : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0 = 0$ allora per l'Osservazione 3.5.5

$$H_\infty : \begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

D'altra parte, la giacitura di H è il sottospazio vettoriale di K^n di equazione

$$W : a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$$

e le rette vettoriali di W sono del tipo $\langle v \rangle$, dove il vettore $v = (v_1, \dots, v_n)$ verifica l'uguaglianza $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. Quindi è naturale definire

$$\alpha : H_\infty \longrightarrow \mathbb{P}(W)$$

in questo modo: per ogni punto $P = [0, x_1, \dots, x_n] \in H_\infty$ (cioè tale che $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$) si pone $\alpha(P) := [x_1, \dots, x_n]$. Si verifica immediatamente che α è ben definita (cioè non dipende dalla scelta del rappresentante delle coordinate omogenee di P) ed è biunivoca. $\square$

La nozione di chiusura proiettiva si generalizza in modo naturale a un qualunque sottospazio affine.

Ricordando il sottospazio proiettivo $L(X)$ generato da un insieme X (vedi Definizione 3.1.7), introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.5.7. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine. Si dice *chiusura proiettiva* di S il sottospazio proiettivo $L(S)$ e si denota con $\overline{S}$, i.e.

$$\overline{S} := \bigcap_{\mathbb{P}(U) \supset S} \mathbb{P}(U).$$

Si dice inoltre *sottospazio all'infinito* o *sottospazio improprio* di S l'insieme

$$S_\infty := \overline{S} \setminus S.$$

Dall'Esercizio P3 segue facilmente (Ⓐ) che, nel caso in cui S stesso sia un iperpiano, la definizione di chiusura proiettiva data sopra coincide con quella data nella Definizione 3.5.6.

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente utile risultato.

Proposizione 3.5.5. Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine e siano $H_1, \dots, H_s$ iperpiani tali che $S = H_1 \cap \dots \cap H_s$. Allora la chiusura proiettiva di S è il sottospazio proiettivo

$$\overline{S} = \overline{H}_1 \cap \dots \cap \overline{H}_s.$$

Inoltre il sottospazio all'infinito di S è

$$S_\infty = (H_1)_\infty \cap \dots \cap (H_s)_\infty = \mathbb{P}(W),$$

dove W è la giacitura di S .

Esempio 3.5.5. Data la retta $r \subset \mathbb{A}^3$, vogliamo determinare la sua chiusura proiettiva $\overline{r} \subset \mathbb{P}^3$ e il suo punto improprio r_∞ , dove

$$r : \begin{cases} x + 2y - z + 2 &= 0 \\ 3x + z + 1 &= 0 \end{cases}.$$

Per la Proposizione 3.5.5 si ha

$$\overline{r} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_0 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_0 &= 0 \end{cases}$$

e

$$r_\infty : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 &= 0 \\ x_2 &= -2x_1 \\ x_3 &= -3x_1 \end{cases}$$

e quindi $r_\infty = [0, 1, -2, -3]$.

Esercizio P4. Generalizzare il Corollario 3.5.3 a sottospazi affini di qualunque dimensione, cioè se $S, T \subset \mathbb{A}^n$ sono due sottospazi affini paralleli con $\dim S \leq \dim T$ allora $S_\infty \subseteq T_\infty$.

Fasci proiettivizzati

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato i fasci di iperpiani nello spazio affine $\mathbb{A}^n$, suddividendoli in “propri” e “impropri”: i primi avevano in comune un sottospazio affine di codimensione 2 (ad esempio, i fasci propri di rette nel piano di centro un punto) e i secondi avevano in comune una giacitura (ad esempio, un fascio improprio di rette nel piano, tutte parallele a una retta data). Tale distinzione viene a cessare nella Geometria Proiettiva.

Definizione 3.5.8. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di iperpiani in $\mathbb{A}^n$. Diciamo suo *fascio proiettivizzato* l'insieme di iperpiani di $\mathbb{P}^n$ dato da

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{H} \subset \mathbb{P}^n \mid H \in \mathcal{F}\}.$$

Osservazione 3.5.6. Se $\mathcal{F}$ è un fascio proprio di iperpiani di sostegno un sottospazio affine L (con $\text{codim}(L) = 2$) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\overline{L}$.

Se invece $\mathcal{F}$ è un fascio improprio di iperpiani di giacitura W (con W iperpiano vettoriale di K^n) allora $\overline{\mathcal{F}}$ è un fascio di iperpiani proiettivi di sostegno $\mathbb{P}(W) \subset H_0$.

Esempio 3.5.6. Si consideri il fascio di rette in $\mathbb{A}^2$ dato da

$$\mathcal{F}: \quad \lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$$

e sia $\overline{\mathcal{F}}$ il suo fascio proiettivizzato. Determinare una equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ (in coordinate omogenee) e il suo centro.

Chiaramente $\overline{\mathcal{F}}$ ha come generatori le chiusure proiettive dei generatori di $\mathcal{F}$ e dunque l'equazione di $\overline{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{P}^2$ è

$$\overline{\mathcal{F}}: \quad \lambda(x_1 + x_2 - 3x_0) + \mu(2x_1 - x_2) = 0.$$

Pertanto il centro di $\overline{\mathcal{F}}$ è il punto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [1, 1, 2].$$

Esempio 3.5.7. Come l'esercizio precedente, ma riguardo al fascio di piani in $\mathbb{A}^3$ (con coordinate affini (x, y, z)) dato da

$$\mathcal{F}: \quad x + y + t = 0.$$

Convien scrivere $\mathcal{F}$ utilizzando due parametri omogenei invece dell'unico parametro non omogeneo, cioè $\mathcal{F}: \lambda(x + y) + \mu = 0$. Dunque

$$\overline{\mathcal{F}}: \quad \lambda(x_1 + x_2) + \mu x_0 = 0.$$

Pertanto il sostegno di $\overline{\mathcal{F}}$ è la retta r intersezione dei 2 piani generatori

$$r: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Si noti che r non è la proiettivizzata di alcuna retta dello spazio affine, in quanto essa giace nel piano all'infinito.

(Scrivere una equazione parametrica di r .

3.6 Proiettività

Introduciamo ora le applicazioni “opportune” nella categoria degli spazi proiettivi.

Definizione 3.6.1. Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi della stessa dimensione. Diciamo che un'applicazione

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

è un *isomorfismo proiettivo* se esiste un isomorfismo di K -spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow V'$ tale che, per ogni $v \in V \setminus \{0_V\}$,

$$f(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle.$$

Equivalentemente, posta $\pi : V \setminus \{0_V\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ l'applicazione suriettiva definita da $\pi(v) = \langle v \rangle$ (e definita analogamente π'), f è un isomorfismo proiettivo se il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0_V\} & \xrightarrow{\varphi} & V' \setminus \{0_{V'}\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(V') \end{array}$$

è commutativo. Diremo inoltre che f è l'*isomorfismo proiettivizzato* di φ o che è *indotto da* φ . Scriveremo anche $f = \overline{\varphi}$.

Chiaramente f è univocamente individuato da φ , ma non viceversa, come vedremo.

Esercizio P5. Provare che un isomorfismo proiettivo è ben definito ed è biiettivo.

Definizione 3.6.2. Due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo proiettivo $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$. In tal caso scriveremo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(V')$.

Esercizio P6. Provare che la composizione di isomorfismi proiettivi è ancora un isomorfismo proiettivo e precisamente che $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \overline{\varphi \circ \psi}$.

Provare inoltre che se f è un isomorfismo proiettivo, anche f^{-1} lo è e precisamente che $(\overline{\varphi})^{-1} = \overline{\varphi^{-1}}$.

Proposizione 3.6.1. Se $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n allora $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}_K^n$.

Dimostrazione. Per un noto risultato di Algebra Lineare, $V \cong K^{n+1}$, cioè esiste un isomorfismo di K -spazi vettoriali $\varphi : V \longrightarrow K^{n+1}$. Se $f := \overline{\varphi}$, allora $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ è un isomorfismo proiettivo, come volevamo. $\square$

Per come è definito un isomorfismo proiettivo indotto da un isomorfismo lineare, si ha facilmente il seguente fatto.

Osservazione 3.6.1. Sia $\varphi : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo di K -spazi vettoriali. Allora, per ogni $\lambda \in K^*$, gli isomorfismi φ e $\lambda\varphi$ inducono lo stesso isomorfismo proiettivo, i.e.

$$\overline{\varphi} = \overline{\lambda\varphi}.$$

Per verificare che

$$\overline{\varphi} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V') \quad \text{e} \quad \overline{\lambda\varphi} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

coincidono, bisogna provare che, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$, si verifica

$$\overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \overline{\lambda\varphi}(\langle v \rangle).$$

Dalla Definizione 3.6.1 si ha che

$$\overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \langle \varphi(v) \rangle \quad \text{e} \quad \overline{\lambda\varphi}(\langle v \rangle) = \langle (\lambda\varphi)(v) \rangle.$$

Ma $\langle (\lambda\varphi)(v) \rangle = \langle \lambda\varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v) \rangle$, come volevamo.

È naturale chiedersi se valga il viceversa. La risposta è affermativa, ma non immediata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 3.6.2. *Siano $\varphi, \psi : V \longrightarrow V'$ due isomorfismi di K -spazi vettoriali. Se $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$ come isomorfismi proiettivi da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V')$, allora esiste $\lambda \in K^*$ tale che*

$$\psi = \lambda\varphi.$$

Dimostrazione. Per ipotesi e per definizione, per ogni $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ si ha

$$\langle \varphi(v) \rangle = \overline{\varphi}(\langle v \rangle) = \overline{\psi}(\langle v \rangle) = \langle \psi(v) \rangle.$$

Pertanto esiste uno scalare $\lambda_v \in K^*$, dipendente da v , tale che

$$\psi(v) = \lambda_v \varphi(v).$$

Applicando φ^{-1} ad ambo i membri si ottiene

$$\varphi^{-1}(\psi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda_v \varphi(v)) = \lambda_v v.$$

Quindi v è un autovettore di $\varphi^{-1} \circ \psi$: ciò accade per ogni $v \in V$ e dunque, necessariamente, $\varphi^{-1} \circ \psi$ è un'omotetia. Dunque esiste $\lambda \in K^*$ (indipendente da v) tale che $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \text{Id}_V$, da cui $\psi = \lambda\varphi$, come volevamo. $\square$

Come abbiamo fatto per gli spazi affini, focalizzeremo la nostra attenzione a isomorfismi che hanno uguale dominio e codominio. La nozione analoga all'affinità (introdotta nel Capitolo 1) è dunque la seguente.

Definizione 3.6.3. Si dice *proiettività* di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ un isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V).$$

È evidente che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è una proiettività. Dunque per l'Esercizio P6 si ha immediatamente che l'insieme

$$\{f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V) \mid f \text{ è una proiettività}\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione.

Definizione 3.6.4. Tale gruppo si dice *gruppo delle proiettività* di $\mathbb{P}(V)$ e si denota con $PGL(\mathbb{P}(V))$. In particolare, invece di $PGL(\mathbb{P}_K^n)$, scriveremo $PGL(n+1, K)$ che viene detto *gruppo proiettivo lineare generale*.

Proposizione 3.6.3. Se V è un K -spazio vettoriale, l'applicazione

$$\alpha : GL(V) \longrightarrow PGL(\mathbb{P}(V)) \quad \text{data da} \quad \varphi \mapsto \overline{\varphi}$$

è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Inoltre $\ker(\alpha) = \text{Om}(V)$, il gruppo delle omotetie di V . Conseguentemente

$$PGL(\mathbb{P}(V)) \cong GL(V)/\text{Om}(V).$$

Dimostrazione. Poiché, per definizione, ogni proiettività di $\mathbb{P}(V)$ è individuata da un isomorfismo lineare di V , l'applicazione α è suriettiva.

Inoltre, per l'Esercizio P6, α è un omomorfismo di gruppi.

Resta da determinare il suo nucleo, cioè

$$\ker(\alpha) = \{\varphi \in GL(V) \mid \overline{\varphi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}\}.$$

È evidente che $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)} = \overline{\text{Id}_V}$. Quindi, per l'Osservazione 3.6.1 e il Teorema 3.6.2, si ha che

$$\overline{\varphi} = \overline{\text{Id}_V} \iff \exists \lambda \in K^* \mid \varphi = \lambda \text{Id}_V \iff \varphi \in \text{Om}(V).$$

□

Il problema di determinare le equazioni di una proiettività è facilmente risolubile: basti pensare che ogni $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$ è del tipo $f = \overline{\varphi}$ per un'opportuna $\varphi \in GL(V)$. Nel caso particolare (che non è restrittivo, per la Proposizione 3.6.1) in cui $V = K^{n+1}$ e quindi $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_K^n$, l'omomorfismo α si esplicita come

$$\alpha : GL(n+1, K) \longrightarrow PGL(n+1, K) \quad \text{data da} \quad M \mapsto [M].$$

Se, fissata una base $\mathcal{B}$ di V e posta $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, l'equazione di φ è

$$Y = MX,$$

allora l'equazione di $f = \overline{\varphi}$ (rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{B}$ di $\mathbb{P}(V)$) è

$$\rho Y = MX$$

dove $\rho \in K^*$. Diremo che M è la *matrice associata a f rispetto al riferimento $\mathcal{B}$* , intendendo che è determinata a meno di una costante non nulla (più precisamente a f è associata una classe di equivalenza $[M]$ di matrici, tutte proporzionali a M).

Esempio 3.6.1. Determinare tutte e sole le proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tali che $f(A_i) = B_i$, con $i = 1, 2, 3$, dove

$$A_1 = [1, 0, 0], \quad A_2 = [0, 1, 0], \quad A_3 = [0, 0, 1]$$

$$B_1 = [1, 1, 0], \quad B_2 = [1, 0, 1], \quad B_3 = [0, 1, 1].$$

Per determinare una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ associata a f , imponiamo le 3 condizioni precedenti sulla generica matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cioè (intendendo le coordinate dei punti scritte per colonne):

$$\rho B_i = M A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ad esempio, dalla prima si ha

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}.$$

In modo analogo si impongono le altre due condizioni, ottenendo

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

In tal modo si è determinata una famiglia di ∞^3 matrici che soddisfano i requisiti richiesti. Di conseguenza tutte le proiettività cercate costituiscono la famiglia di ∞^2 elementi

$$\left\{ [M] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

La domanda che nasce naturalmente dal precedente Esempio è: quanti punti sono necessari per individuare univocamente una proiettività?

La risposta è nel seguente risultato, analogo a quello della *Determinazione di un'affinità mediante punti* (vedi Capitolo 1, Teorema 1.11.6).

Teorema 3.6.4 (Teorema fondamentale sulle proiettività).

Si considerino due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, entrambi di dimensione n . Se $P_0, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_0, \dots, Q_{n+1} \in \mathbb{P}(V')$ sono due $(n+2)$ -uple di punti in posizione generale, allora esiste un'unico isomorfismo proiettivo

$$f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza di f .

Siano $v_i \in V$ e $w_i \in V'$ vettori tali che $P_i = [v_i]$ e $Q_i = [w_i]$, per ogni $i = 0, 1, \dots, n+1$. Per ipotesi, $v_0, \dots, v_n$ sono una base di V e quindi si può scrivere

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad (3.3)$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Analogamente

$$w_{n+1} = \mu_0 w_0 + \dots + \mu_n w_n \quad (3.4)$$

dove i μ_i sono tutti non nulli.

Siano ora $\mathcal{B} := (\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_n v_n)$ e $\mathcal{B}' := (\mu_0 w_0, \dots, \mu_n w_n)$: chiaramente sono ancora basi di V e V' , rispettivamente. Per un noto risultato di Algebra Lineare, esiste un unico isomorfismo di K -spazi vettoriali

$$\varphi : V \longrightarrow V' \quad \text{tale che} \quad \varphi(\lambda_i v_i) = \mu_i w_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Di conseguenza, per (3.3) e (3.4), vale anche

$$\varphi(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Pertanto, posto $f := \overline{\varphi}$, si ha che f è un isomorfismo proiettivo e verifica

$$f(P_i) = Q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1.$$

Proviamo ora l'unicità di f .

Supponiamo che esista un isomorfismo proiettivo

$$f' : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

tale che

$$f'(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Poniamo $g := (f')^{-1} \circ f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$. Se mostriamo che $g = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, concluderemo che $f' = f$.

A tale scopo, osserviamo dapprima che, per l'Esercizio P6, g risulta una proiettività e quindi è indotta da un automorfismo ψ di V . Equivalentemente, $g = \overline{\psi}$. Si noti che $g(P_i) = P_i$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$ e questo implica che $\psi(v_i) = \rho_i v_i$, per opportuni scalari $\rho_i \in K^*$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$.

In particolare, $\psi(v_{n+1}) = \rho_{n+1} v_{n+1}$. Inoltre,

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \quad (3.5)$$

dove i λ_i sono tutti non nulli. Quindi, per la linearità di ψ si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) &= \psi(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \\ &= \lambda_0 \rho_0 v_0 + \dots + \lambda_n \rho_n v_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, sempre da (3.5), si ha

$$\begin{aligned} \psi(v_{n+1}) &= \rho_{n+1} v_{n+1} = \rho_{n+1} (\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \\ &= \lambda_0 \rho_{n+1} v_0 + \dots + \lambda_n \rho_{n+1} v_n. \end{aligned}$$

Confrontando le due precedenti espressioni di $\psi(v_{n+1})$ e tenendo conto del fatto che $v_0, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda_0 \rho_0 &= \lambda_0 \rho_{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n \rho_n &= \lambda_n \rho_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 - \rho_{n+1} &= 0 \\ \vdots & \vdots \\ \rho_n - \rho_{n+1} &= 0 \end{cases}$$

dove l'implicazione segue dal fatto che i λ_i sono tutti non nulli.

Quindi tutti i ρ_i coincidono e ponendo

$$\rho := \rho_0 = \dots = \rho_{n+1},$$

si ha che $\psi(v_i) = \rho v_i$, per ogni i . Di conseguenza, $\psi = \rho \text{Id}_V$ è un'omotetia e quindi $g = \overline{\psi} = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$, come volevamo. $\square$

Esempio 3.6.2. Dal precedente teorema segue che per determinare una proiettività di $\mathbb{P}^n$ servono due $n+2$ -uple di punti in posizione generale. Ad esempio, per determinare una proiettività di $\mathbb{P}^2$ servono due quaterne di punti in posizione generale.

Consideriamo la situazione dell'Esempio 3.6.1: abbiamo determinato tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^2$ tali che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3$. Se alle 2 terne date aggiungiamo $A_4 = [1, 1, 1] = B_4$, poiché le due quaterne A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4 sono in posizione generale, troveremo un'unica proiettività tale che $f(A_i) = B_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

Chiaramente basta imporre l'ultima condizione $f(A_4) = B_4$ alla famiglia determinata nell'Esempio 3.6.1, che risultava essere costituita dalle matrici

$$M = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix}.$$

Tale condizione si esprime imponendo

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \sigma & 0 \\ \rho & 0 & \tau \\ 0 & \sigma & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + \sigma \\ \rho + \tau \\ \sigma + \tau \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = \sigma = \tau.$$

Pertanto le matrici richieste sono

$$M = \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che è associata a un'unica proiettività di $\mathbb{P}^2$ (come affermato dal Teorema 3.6.4).

Osservazione 3.6.2. (*non banale*) Si confronti il Teorema 3.2.2 col Teorema 3.6.4 (e tenendo presente il Teorema 3.6.2). Il primo si può riformulare dicendo che la scelta di un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di un isomorfismo proiettivo $\rho: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ che mette in corrispondenza i rispettivi punti fondamentali ed i punti unità, che a sua volta equivale alla scelta dei punti fondamentali (ordinati) e del punto unità.

In analogia con quanto visto negli spazi affini, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 3.6.5. Due sottoinsiemi X e X' di $\mathbb{P}^n$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^n$ tale che $f(X) = X'$.

Dal Teorema fondamentale sulle proiettività segue immediatamente questo risultato.

Corollario 3.6.5. Due r -uple di punti di $\mathbb{P}^n$ in posizione generale sono proiettivamente equivalenti se $1 \leq r \leq n + 2$.

Capitolo 4

CONICHE

4.1 Coniche nel piano euclideo

A. CONICHE COME LUOGHI GEOMETRICI

L'ambiente in cui inizialmente studieremo le coniche è il piano euclideo $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$. Successivamente avremo bisogno anche di coordinate complesse, quindi “amplieremo” il nostro ambiente ad $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$: è intuitivamente chiaro che dall'inclusione canonica $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$, segue l'inclusione dei piani euclidei

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2.$$

Le coniche sono note fino dai tempi più remoti come *luoghi geometrici*, cioè come insiemi di punti caratterizzati da proprietà geometriche.

Definizione 4.1.1.

- a) Fissata una retta δ e un punto F del piano, il luogo dei punti equidistanti da δ e da F si dice *parabola* e il punto F e la retta δ sono detti, rispettivamente, *fuoco* e *direttrice* della parabola.
- b) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2 , il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *ellisse*.
- c) Fissati due punti del piano F_1 ed F_2 , il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da F_1 ed F_2 è costante si dice *iperbole*.

Nei casi (b) e (c), i punti F_1 e F_2 sono detti *fuochi* dell'ellisse o dell'iperbole, rispettivamente

Per determinare le equazioni di questi luoghi geometrici, al fine di semplificare i calcoli, scegliamo opportunamente i punti e le rette in questione.

a) Siano, ad esempio, in un riferimento cartesiano ortogonale $(O; x, y)$:

$$\delta : y = -p/2, \quad F = (0, p/2).$$

Sia $P = (x, y)$ un generico punto del piano; il luogo geometrico in questione è caratterizzato dalla proprietà

$$d(P, \delta) = d(P, F).$$

Poiché la proiezione ortogonale di P su δ è il punto $P' = (x, -p/2)$ e $d(P, \delta) = d(P, P')$, la condizione precedente diventa:

$$\|P - P'\|^2 = \|P - F\|^2 \quad \text{cioè} \quad \|(0, y + p/2)\|^2 = \|(x, y - p/2)\|^2$$

quindi

$$(y + p/2)^2 = x^2 + (y - p/2)^2 \quad \text{da cui} \quad x^2 = 2py.$$

b) Siano $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e sia k un numero reale positivo tale che $k > 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k. \quad (4.1)$$

Consideriamo le intersezioni di tale luogo geometrico con i semiassi positivi, cioè due punti del tipo $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, con $a > 0, b > 0$. Dal fatto che $d(A, F_1) + d(A, F_2) = k$, segue $k = 2a$; inoltre dalla relazione $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$ segue che $2\sqrt{q^2 + b^2} = k$. Quindi si hanno le uguaglianze

$$k = 2a, \quad q^2 = a^2 - b^2.$$

(Si osservi che, in particolare, si deduce $a \geq b$). Elevando al quadrato ambo i membri di (4.1), si ottiene:

$$\|(x + q, y)\|^2 + \|(x - q, y)\|^2 + 2\|(x + q, y)\| \|(x - q, y)\| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + q^2).$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi, operando la sostituzione $q^2 = a^2 - b^2$, si ottiene l'equazione del luogo geometrico in questione in funzione dei due parametri a e b :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per a^2b^2 si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se $q = 0$, cioè se $a = b$, allora i fuochi F_1 ed F_2 coincidono nell'origine, l'ellisse si dice *circonferenza* e la sua equazione assume la forma

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dove $r = a = b$ ed è detto *raggio* della circonferenza.

c) Fissiamo i punti $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$ (con $q \geq 0$) e un numero reale positivo $k < 2q$; vogliamo determinare l'equazione del luogo dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k. \quad (4.2)$$

Si osservi che, contrariamente al caso precedente, tale luogo geometrico non interseca l'asse y , in quanto ogni suo punto P è equidistante da F_1 e F_2 , mentre $k \neq 0$.

Si consideri, invece, l'intersezione $A = (a, 0)$ ($a > 0$) di tale luogo geometrico con il semiasse positivo delle x . Anche per A vale

$$k = |d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |a + q - |a - q||.$$

Se fosse $|a - q| = a - q$, si avrebbe $k = 2q$, contro l'ipotesi $k < 2q$. Quindi deve essere $a < q$ e dunque la condizione precedente implica

$$k = |a + q + a - q| = 2a.$$

Elevando al quadrato ambo i membri di (4.2), si ottiene:

$$\| (x + q, y) \|^2 + \| (x - q, y) \|^2 - 2 \| (x + q, y) \| \| (x - q, y) \| = 4a^2$$

cioè

$$2(x^2 + y^2 + q^2) - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2 + 2qx)(x^2 + y^2 + q^2 - 2qx)} = 4a^2$$

e quindi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + q^2)^2 - 4q^2x^2} = (x^2 + y^2 + q^2) - 2a^2.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando si ottiene dunque:

$$-q^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + q^2)$$

e quindi

$$(a^2 - q^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - q^2).$$

Poiché $a < q$, la quantità $q^2 - a^2$ è sicuramente positiva; si ponga dunque, in analogia con quanto visto nel caso b), $q^2 - a^2 = b^2$; pertanto l'equazione del luogo geometrico in questione diventa:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividendo ambo i membri per $-a^2b^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Osservazione 4.1.1. Da quanto visto in precedenza, segue che, se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py,$$

allora la sua direttrice ha equazione $y = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(0, p/2)$. Con procedimento del tutto analogo, se C è una parabola di equazione $y^2 = 2px$, allora la sua direttrice è $x = -p/2$ e il suo fuoco è il punto $(p/2, 0)$.

Se C è una ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e $a > b$, allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ (con procedimento del tutto analogo, si vede che se $a < b$ allora i suoi fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{b^2 - a^2})$).

Se C è un'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$.

Esercizio.  Che equazione ha un'iperbole i cui fuochi sono i punti $(0, \pm\sqrt{a^2 + b^2})$?

Definizione 4.1.2. Ricordiamo le rette e i punti notevoli di una conica.

- i) Sia C una parabola di fuoco F e di direttrice δ ;
 - la retta ortogonale a δ e passante per F si dice *asse* di C ;
 - il punto di intersezione dell'asse con la parabola si dice *vertice*.
- ii) Sia C un'ellisse di fuochi (distinti) F_1 e F_2 ;
 - la retta per i fuochi si dice *asse maggiore*;
 - la retta asse del segmento $\overline{F_1F_2}$ si dice *asse minore*;
 - il punto di intersezione dell'asse maggiore e dell'asse minore (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$) si dice *centro* di C ;

- i quattro punti di intersezione di C con gli assi si dicono *vertici*;
- la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici che appartengono all'asse maggiore si dice *semiasse maggiore* (analogamente si definisce il *semiasse minore*).

- iii) Sia C un'iperbole di fuochi (distinti) F_1 e F_2 ;
- la retta per i fuochi si dice *asse trasverso*;
 - la retta asse del segmento $\overline{F_1 F_2}$ si dice *asse non trasverso*;
 - il punto di intersezione dell'asse trasverso e dell'asse non trasverso (cioè il punto medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$) si dice *centro* di C ;
 - i due punti di intersezione di C con l'asse trasverso si dicono *vertici*;
 - la misura dei segmenti congiungenti il centro e i vertici si dice *semiasse trasverso*.

Esempio 4.1.1. La parabola vista sopra: $x^2 = 2py$ ha fuoco $F = (0, p/2)$ e direttrice $\delta : y = -p/2$. Dunque il suo asse è $x = 0$ e il suo vertice è soluzione del sistema $x = 0 = x^2 - 2py$ e pertanto è il punto $(0, 0)$.

L'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha come asse maggiore la retta per i due fuochi $F_1 = (-q, 0)$, $F_2 = (q, 0)$, cioè la retta $y = 0$ e come asse minore la retta $x = 0$. Il centro è quindi il punto $(0, 0)$.

Definizione 4.1.3. Sia C un luogo geometrico.

- a) Una retta r si dice *asse di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a r appartiene ancora a C ;
- b) un punto O si dice *centro di simmetria* per C se, per ogni punto $P \in C$, il punto P' simmetrico di P rispetto a O appartiene ancora a C .

Proposizione 4.1.1.

i) Se C è una parabola di equazione

$$x^2 = 2py$$

allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;

ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, di equazioni rispettive

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è centro di simmetria.

Dimostrazione. *i)* Come visto nell'esempio precedente, l'asse di C è la retta $x = 0$ che risulta asse di simmetria per C . Infatti, se $P = (x_0, y_0) \in C$ allora vale $x_0^2 = 2py_0$. Il punto simmetrico di P rispetto all'asse y è $P' = (-x_0, y_0)$, che appartiene ancora a C in quanto $2py_0 = x_0^2 = (-x_0)^2$. Inoltre il vertice è l'origine $(0, 0)$, che è chiaramente equidistante da δ e dal fuoco F .

ii) Se C è l'ellisse considerata, nel caso in cui $a > b$ per l'Osservazione 4.1.1 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, dunque l'asse maggiore è la retta $y = 0$. L'asse minore è ovviamente la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine. Il caso $a < b$ è analogo.

Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C , allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse x), $P'' = (-x_0, y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'asse y), $P''' = (-x_0, -y_0)$ (simmetrico di P rispetto all'origine), verificano la stessa equazione. Dunque gli assi dell'ellisse sono assi di simmetria e il centro è il centro di simmetria.

Infine sia C l'iperbole data; ancora per l'Osservazione 4.1.1 i suoi fuochi sono i punti $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, dunque l'asse trasverso è la retta $y = 0$. L'asse non trasverso è la retta $x = 0$, quindi il centro di C è l'origine.

Se un punto $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione di C , allora anche i punti $P' = (x_0, -y_0)$, $P'' = (-x_0, y_0)$, $P''' = (-x_0, -y_0)$ verificano la stessa equazione. $\square$

Definizione 4.1.4. Una conica si dice *conica a centro* se è una ellisse o una iperbole.

B. EQUAZIONE DI UNA CONICA GENERALE E SUA FORMA MATRICIALE

Nella parte precedente del paragrafo abbiamo visto che, in un opportuno sistema di riferimento, una parabola, un'ellisse e un'iperbole hanno una equazione del tipo

$$x^2 = 2py; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.3)$$

E' evidente, però, che tali equazioni non sono le più generali, infatti i luoghi geometrici di cui sopra sono in una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani (che, ad esempio, nel caso dell'ellisse e dell'iperbole, sono i loro assi di simmetria).

Ciò che accomuna le tre equazioni precedenti è il fatto che sono tutte associate a polinomi di secondo grado nelle variabili x e y .

Definizione 4.1.5. Si dice *conica* il luogo dei punti di $\mathbb{E}^2$ aventi coordinate (x, y) che soddisfano una equazione polinomiale di secondo grado a coefficienti reali in due variabili, cioè una equazione del tipo:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4.4)$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$. La denominazione dei coefficienti (con due indici) come pure il fattore 2 nei coefficienti di alcuni monomi sono dovuti a motivi pratici, che risulteranno chiari a breve.

Tratteremo generalmente i punti *reali* di una conica, tuttavia in alcuni contesti considereremo anche i punti a coordinate *complesse*, tenendo conto dell'inclusione $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$.

Osservazione 4.1.2. Le coniche di (4.3) sono casi particolari dell'equazione generale (4.4); ad esempio la prima si ottiene per

$$a_{11} = 1, \quad a_{23} = -p, \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$$

e analogamente le altre; si osservi che in tutte le equazioni (4.3) il coefficiente a_{12} del monomio xy è nullo.

Ci chiediamo se ogni equazione del tipo (4.4) descrive uno dei luoghi geometrici precedentemente definiti (cioè se è una parabola, un'ellisse o un'iperbole). Tale domanda, così formulata, ha chiaramente risposta negativa. Infatti, ad esempio, il polinomio $x^2 - y^2$ si fattorizza nel prodotto $(x + y)(x - y)$ e quindi la conica di equazione $x^2 - y^2 = 0$ risulta essere l'unione delle due rette di equazione $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

Più in generale, ogni equazione di secondo grado del tipo

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

rappresenta l'unione di due rette. Tali rette non sempre sono reali. Ad esempio si consideri l'equazione $x^2 + y^2 = 0$. In $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ tale equazione ha la sola soluzione $(0, 0)$, mentre in $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$, poiché $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$, corrisponde all'unione delle due rette complesse e coniugate $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$.

Definizione 4.1.6. Una conica si dice *degenere* se è unione di due rette (che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate).

Nel seguito utilizzeremo ampiamente una scrittura più sintetica ma equivalente all'equazione (4.4).

Definizione 4.1.7. Sia C la generica conica di equazione (4.4), cioè

$$C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Le matrici

$$B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, *matrice dei coefficienti* e *matrice della forma quadratica* di C .

Osservazione 4.1.3. L'equazione (4.4) di una conica C diventa dunque

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Inoltre la parte omogenea di secondo grado del polinomio che definisce la conica C , cioè

$$F_C(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

è una *forma quadratica*, esprimibile anch'essa in termini di matrici come

$$F_C(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.1.2. Le matrici associate alla parabola $y = 3x^2$ sono:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.1.4. Si noti che i 6 coefficienti a_{ij} che compaiono in (4.4) individuano una conica, ma non viceversa; infatti per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'equazione

$$ka_{11}x^2 + 2ka_{12}xy + ka_{22}y^2 + 2ka_{13}x + 2ka_{23}y + ka_{33} = 0$$

definisce lo stesso luogo di punti del piano, cioè la stessa conica. Pertanto ogni conica è individuata da ∞^1 equazioni o, più precisamente, da ∞^1 sestuple di coefficienti, tutte tra loro proporzionali.

4.2 Forma canonica: traslazioni

Vogliamo risolvere il seguente problema: data una conica non degenera in forma generale, esiste un riferimento cartesiano del piano euclideo in cui tale conica assume una forma particolarmente semplice, cioè una forma “simile” a quelle di (4.3)? O, più in generale, in cui la matrice A è diagonale? A tale scopo introduciamo la seguente importante nozione.

Definizione 4.2.1. Si dice *forma canonica* di una conica non degenera C una sua equazione in riferimento cartesiano $(O; x, y)$ che è di una delle seguenti forme:

$$\begin{array}{ll} (P.i) & x^2 = 2py \\ (P.ii) & y^2 = 2px \\ (E.i) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ (E.ii) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ (I.i) & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ (I.ii) & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \end{array}$$

dove p, a, b sono non nulli. La conica C viene detta, rispettivamente:

- *parabola*, nei casi $(P.i)$ e $(P.ii)$;
- *ellisse reale*, nel caso $(E.i)$;
- *ellisse immaginaria*, nel caso $(E.ii)$;
- *iperbole*, nei casi $(I.i)$ e $(I.ii)$.

Risolveremo il problema iniziale in due passi successivi: dapprima, in questo paragrafo, ci limiteremo a coniche nella cui equazione non appare il monomio xy , cioè tali $a_{12} = 0$; vedremo che il sistema di riferimento cercato è ottenibile mediante traslazione. Nel prossimo paragrafo vedremo che, data una conica in forma generale, il riferimento in cui si annulla il coefficiente del monomio xy si otterrà mediante una rotazione. La procedura globale per ottenere una forma canonica di una conica risulterà essere, quindi, una rototraslazione del piano, cioè un'isometria diretta di $\mathbb{E}^2$.

Esempio 4.2.1. Sia $\Gamma : y = 2x^2$ una parabola in forma canonica; vediamo come varia l'equazione di Γ se operiamo la traslazione del piano

$$t_{(-\alpha, -\beta)} : \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}.$$

Sostituendo si ottiene l'equazione di Γ in $(O'; X, Y)$:

$$Y = 2X^2 + 4\alpha X + 2\alpha^2 - \beta.$$

Esempio 4.2.2. Sia $\Gamma' : x^2 + 2y^2 = 1$ un'ellisse in forma canonica; con la traslazione $t_{(-\alpha, -\beta)}$ dell'esempio precedente, l'equazione di Γ' diventa:

$$X^2 + 2Y^2 + 2\alpha X + 4\beta Y + \alpha^2 + 2\beta^2 - 1 = 0.$$

Si osservi che, attraverso la traslazione $t_{(-\alpha, -\beta)}$, le coniche Γ e Γ' passano dalla forma canonica a una nuova forma nella quale il coefficiente a_{12} è zero. Proviamo ora il viceversa: se una conica ha una equazione priva del monomio xy , la si può ridurre a forma canonica operando una traslazione.

Osservazione 4.2.1 (*Metodo del completamento dei quadrati*).

Si consideri, in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$, una conica non degenera con equazione priva del monomio xy

$$C : a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0. \quad (4.5)$$

Si possono presentare due casi: o entrambi i coefficienti a_{11} e a_{22} sono non nulli oppure uno dei due è nullo.

I. Caso $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$.

(il caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ è del tutto analogo).

L'equazione (4.5) diventa dunque:

$$a_{22} y^2 + 2 a_{23} y + a_{33} + 2 a_{13} x = 0. \quad (4.6)$$

Poiché

$$a_{22} y^2 + 2 a_{23} y = a_{22} \left(y^2 + 2 \frac{a_{23}}{a_{22}} y \right) = a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} \quad (4.7)$$

l'equazione (4.6) diventa:

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} + a_{33} + 2 a_{13} x = 0. \quad (4.8)$$

Poiché si suppone C non degenera, allora $a_{13} \neq 0$ e quindi

$$a_{22} \left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 + 2 a_{13} \left(x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \right) = 0$$

da cui

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \right)^2 = - \frac{2 a_{13}}{a_{22}} \left(x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \right).$$

Quindi con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{2 a_{22} a_{13}} \\ Y &= y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

e ponendo $p = -a_{13}/a_{22}$, si ottiene la forma canonica:

$$Y^2 = 2pX.$$

Il caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$ è analogo e conduce (nell'ipotesi non degenerare, cioè $a_{23} \neq 0$) alla forma canonica

$$X^2 = 2pY.$$

Se non richiediamo alla conica in questione di essere non degenerare, dobbiamo esaminare anche il caso $a_{13} = 0$ (rispettivamente, $a_{23} = 0$); in questo caso l'equazione (4.8) diventa:

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = \frac{a_{23}^2 - a_{33}a_{22}}{a_{22}^2}$$

e con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

assume la forma

$$Y^2 = q \quad (X^2 = q). \quad (4.9)$$

II. Caso $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$.

Ovviamente, a meno di un cambio di segno nell'equazione (4.5), si può supporre $a_{11} > 0$. Tenendo conto dell'uguaglianza (4.7) e dell'analogia

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x\right) = a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

l'equazione (4.5) diventa:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0.$$

Se si pone $h = -a_{33} + \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$ e si opera la traslazione

$$\begin{cases} X &= x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ Y &= y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica C ha equazione

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 = h. \quad (4.10)$$

Se $h \neq 0$ si ha chiaramente

$$\frac{a_{11}}{h} X^2 + \frac{a_{22}}{h} Y^2 = 1. \quad (4.11)$$

II.a) Caso $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$.

- se $h > 0$ i coefficienti della (4.11) sono strettamente positivi quindi possiamo porre $a_{11}/h = 1/a^2$ e $a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. In tal caso l'equazione (4.11) diventa:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$ si ponga $-a_{11}/h = 1/a^2$ e $-a_{22}/h = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$; quindi l'equazione (4.11) diventa

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, ponendo nell'equazione (4.10) $a_{11} = 1/a^2$ e $a_{22} = 1/b^2$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \quad (4.12)$$

II.b) Caso $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$.

Con un ragionamento del tutto analogo al precedente, si hanno i seguenti casi.

- se $h > 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

- se $h < 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1.$$

- se $h = 0$, con opportune sostituzioni, si ottiene

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0. \quad (4.13)$$

Osservazione 4.2.2. Esaminiamo geometricamente le tre coniche particolari emerse nella costruzione precedente.

-) La conica C di equazione (4.9), cioè

$$x^2 = q \quad (\text{rispettivamente } y^2 = q)$$

è l'unione delle rette $x = \pm\sqrt{q}$. Se $q > 0$, tali rette sono reali e distinte e parallele all'asse y ; se $q < 0$ tali rette sono complesse e coniugate; infine se $q = 0$ la conica C risulta essere l'asse y "contato due volte", cioè costituita da due rette coincidenti.

-) Si noti poi che l'equazione (4.12), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

è soddisfatta da un solo punto a coordinate reali: l'origine $(0, 0)$; mentre nel piano complesso $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ tale conica è l'unione di due rette complesse e coniugate, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{C}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right).$$

-) Infine l'equazione (4.13), cioè

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

corrisponde all'unione di due rette reali e distinte, in quanto si può operare la fattorizzazione di polinomi (in $\mathbb{R}[x, y]$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Quanto precede conduce a provare il seguente fatto.

Osservazione 4.2.3. L'equazione (4.10) rappresenta una conica non degenerare se e solo se $h \neq 0$.

Infatti, col *Metodo di completamento dei quadrati*, si è provato che, se $h \neq 0$ allora si ottiene una forma canonica di tipo $(E.i)$, $(E.ii)$, $(I.i)$ o $(I.ii)$, cioè una conica a centro non degenerare.

Viceversa, se $h = 0$ si ottiene un'equazione dei tipi (4.12) o (4.13), le quali, come osservato sopra, rappresentano coniche degeneri.

E' naturale, dopo lo studio precedente, dare la seguente nozione.

Definizione 4.2.2. Si dice *forma canonica* di una conica degenerare una delle equazioni del tipo (4.9), (4.12), (4.13) e le corrispondenti coniche si diranno *degeneri di tipo parabolico, ellittico, iperbolico*, rispettivamente. In analogia con la Definizione 4.2.1, le denoteremo, rispettivamente, con le sigle $(P.iii)$, $(E.iii)$, $(I.iii)$.

Definizione 4.2.3. Una conica si dice *semplicemente* degenerare se è unione di due rette distinte e *doppiamente* degenerare se è unione di due rette coincidenti.

La procedura vista nell'Osservazione 4.2.1 prova il seguente risultato.

Teorema 4.2.1. Sia C una conica (degenerare o non degenerare) di equazione priva del monomio xy in un riferimento cartesiano $(O; x, y)$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante traslazione, in cui C si esprime con un'equazione in forma canonica.

Esempio 4.2.3. Sia C la conica di equazione

$$C: \quad x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = 0.$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati, poiché

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1, \quad 4y^2 - 12y = 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$

si ha:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 3 = (x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 7.$$

Pertanto, operando la traslazione:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione di C diventa

$$X^2 + 4Y^2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{7/4} = 1.$$

Si tratta quindi di una ellisse di centro $(-1, 3/2)$, assi le rette $x = -1$ e $y = 3/2$ e semiassi $\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/2$.

Infine si possono determinare i 4 vertici dell'ellisse intersecandola con gli assi, sia nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ che nel sistema $(O'; X, Y)$ (si confrontino i risultati ottenuti con i due metodi).

APPENDICE

Matrici congruenti e matrici simili

Definizione 4.2.4. Sia K un campo. Due matrici $A, A' \in K^{n,n}$ si dicono *congruenti* se esiste una matrice $P \in GL(n, K)$ tale che

$$A' = {}^t P A P.$$

Definizione 4.2.5. Due matrici $A, A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dicono (*ortogonalmente*) *simili* se esiste una matrice $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che

$$A' = P^{-1} A P.$$

Si prova facilmente ($\otimes$) che la congruenza e la similitudine sono relazioni di equivalenza nell'insieme $\mathbb{R}^{n,n}$ delle matrici quadrate.

Inoltre, ricordando che una matrice ortogonale $P \in O(n, \mathbb{R})$ verifica $P^{-1} = {}^t P$, è chiaro che due matrici simili sono anche congruenti (ma non viceversa!).

Ricordiamo alcune proprietà delle matrici congruenti e di quelle simili.

Proposizione 4.2.2. Siano $A, A' \in K^{n,n}$ due matrici congruenti:

$$A' = {}^t P A P, \quad \text{dove } P \in GL(n, K).$$

Allora

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A').$$

Inoltre, se $K = \mathbb{R}$, i determinanti di A e di A' hanno lo stesso segno. In particolare, se $\det(P) = \pm 1$ vale anche

$$\det(A) = \det(A').$$

Dimostrazione. Denotando con f_M l'endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ associato a una matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$, si ha

$$f_{A'} = f_{{}^t P} \circ f_A \circ f_P.$$

Poiché f_P e $f_{{}^t P}$ sono isomorfismi, si ha $\dim \text{Im}(f_{A'}) = \dim \text{Im}(f_A)$. Ma $\text{rk}(A') = \dim \text{Im}(f_{A'})$ e $\text{rk}(A) = \dim \text{Im}(f_A)$ e quindi si ha la tesi.

L'ulteriore affermazione, nel caso $K = \mathbb{R}$, segue dal Teorema di Binet:

$$\det(A') = \det({}^t P A P) = \det({}^t P) \det(A) \det(P) = \det(A) \det(P)^2$$

ed essendo $\det(P)^2 > 0$, segue che $\det(A')$ e $\det(A)$ hanno lo stesso segno. Infine, sempre dalla precedente relazione, si ha che $\det(A') = \det(A)$ se $\det(P)^2 = 1$. $\square$

Proposizione 4.2.3. *Siano $A, A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ due matrici simili:*

$$A' = P^{-1}AP, \quad \text{dove } P \in O(n, \mathbb{R}).$$

Allora

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A'),$$

$$\det(A) = \det(A')$$

e i polinomi caratteristici di A e di A' , $p_A(T)$ e $p_{A'}(T)$, coincidono.

Dimostrazione. Avendo osservato che due matrici simili sono congruenti, i ranghi e i determinanti coincidono per la Proposizione 4.2.2. L'ultima affermazione è stata dimostrata nel precedente corso di Algebra lineare. $\square$

4.3 Forma canonica: rotazioni

Esempio 4.3.1. Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, sia data la parabola Γ di equazione (canonica) $y = x^2$. Vogliamo determinare l'equazione di Γ nel sistema di riferimento $(O; X, Y)$ ottenuto dal precedente mediante la seguente rotazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di Γ , si ottiene

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 \Rightarrow X^2 + 2XY + Y^2 + \sqrt{2}X - \sqrt{2}Y = 0.$$

In questo esempio si vede che, per effetto della rotazione, nella ultima equazione della conica appare il monomio XY . E' naturale chiedersi se vale il viceversa, cioè se sia possibile, attraverso una rotazione, passare da un'equazione che contiene il monomio XY a una che non lo contiene. In altri termini, vogliamo determinare un riferimento in cui la matrice della forma quadratica di una conica è diagonale. Il teorema di diagonalizzazione delle matrici reali simmetriche garantisce che ciò è possibile.

Iniziamo con un risultato che lega le equazioni di una conica in due diversi riferimenti cartesiani.

Teorema 4.3.1. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; X, Y)$ due riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$ e siano Q e P , rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio speciale di riferimento dal primo al secondo. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^tQ B Q \quad \text{e} \quad A' := {}^tP A P = P^{-1} A P,$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; X, Y)$. In particolare, B e B' sono congruenti e A e A' sono simili.

Dimostrazione. Siano

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la matrice P è ortogonale speciale, dunque ${}^tP = P^{-1}$ e $\det(P) = 1$. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Trasponendo ambo i membri:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^t Q. \quad (4.15)$$

La conica C , nel sistema di riferimento $(O; x, y)$, ha equazione

$$C: \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi, operando le sostituzioni (4.14) e (4.15) si ottiene

$$C: \begin{pmatrix} X & Y & 1 \end{pmatrix} {}^t Q B Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è l'equazione di C nel riferimento $(O'; X, Y)$. Si osservi che $B' = {}^t Q B Q$ è ancora una matrice simmetrica, come deve essere in quanto matrice di una conica.

Con un facile calcolo, si vede che la matrice A' della forma quadratica di C nel riferimento $(O'; X, Y)$, cioè la sottomatrice 2×2 di B' ottenuta intersecando le prime due righe con le prime due colonne, è esattamente

$$A' = {}^t P A P = P^{-1} A P$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che P è ortogonale. $\square$

Esempio 4.3.2. Riduciamo a forma canonica la conica

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizziamo A come al solito, calcolandone il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autospazi e quindi una base di autovettori per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ ad essa associato:

$$p_A(T) = |A - TI| = \begin{vmatrix} 1-T & -1 \\ -1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2 - 1 = T^2 - 2T = T(T-2)$$

da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

e gli autospazi associati:

$$V_0 = \ker(f_A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \langle (1, 1) \rangle$$

$$V_2 = \ker(f_{A-2I}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \langle (1, -1) \rangle.$$

Pertanto la matrice ortogonale speciale P che esprime l'opportuno cambiamento di base è:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(Si noti che l'ordine degli autovettori è scambiato per ottenere $\det(P) = 1$). Se non operiamo alcuna traslazione, la matrice di rototraslazione ha la forma:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice della conica C nel sistema di riferimento $(O; \bar{x}, \bar{y})$, dove

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{Q} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \end{cases} \quad (4.16)$$

diventa dunque, per il Teorema 4.3.1,

$$\begin{aligned} \overline{B} &= {}^t\overline{Q} B \overline{Q} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di C nel nuovo sistema di riferimento risulta:

$$2\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} - 1 = 0$$

da cui

$$\bar{x}^2 = -2\sqrt{2} \left(\bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right).$$

Operando dunque la traslazione

$$\begin{cases} X = \bar{x} \\ Y = \bar{y} - \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \quad (4.17)$$

si ottiene la parabola, in forma canonica:

$$X^2 = -2\sqrt{2} Y.$$

Chiaramente si può procedere alla rototraslazione globale mediante la matrice Q che esprima sia la precedente rotazione, sia la traslazione sopra scritta. Da (4.16) e (4.17) si hanno le equazioni della rototraslazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{8} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{8} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine si può verificare che la matrice della conica nel riferimento $(O'; X, Y)$ diventa

$$\begin{aligned} {}^tQ B Q &= \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = B'. \end{aligned}$$

L'esempio precedente suggerisce un metodo generale per la riduzione di una conica a forma canonica: è la dimostrazione (costruttiva) del seguente risultato.

Teorema 4.3.2. *Sia C una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O; x, y)$ di $\mathbb{E}^2$; allora esiste un riferimento cartesiano $(O'; X, Y)$, ottenuto dal precedente mediante rototraslazione, in cui C ha un'equazione in forma canonica.*

Dimostrazione. Siano A e B le matrici associate a C nel riferimento $(O; x, y)$.

i) Diagonalizzazione di A .

- Se $a_{12} = 0$ (cioè se A è diagonale) si passa al punto iii).

- Se $a_{12} \neq 0$, si diagonalizza A nel modo consueto, determinando una base ortonormale di autovettori: $v_1 = (p_{11}, p_{21})$, $v_2 = (p_{12}, p_{22})$, in modo che la matrice ortogonale

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

sia speciale.

ii) Posta

$$\overline{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si opera la rotazione corrispondente

$$\begin{cases} x = p_{11}\overline{x} + p_{12}\overline{y} \\ y = p_{21}\overline{x} + p_{22}\overline{y} \end{cases} \quad (4.18)$$

Nel riferimento $(O; \overline{x}, \overline{y})$ la conica ha matrice $\overline{B} = {}^t\overline{Q}B\overline{Q}$ e matrice della forma quadratica $\overline{A} = {}^tPAP$, che risulta dunque diagonale. Pertanto in tale riferimento la conica ha equazione

$$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} & 1 \end{pmatrix} \overline{B} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che è priva del monomio $\overline{x}\overline{y}$.

iii) Si opera la traslazione da $(O; \overline{x}, \overline{y})$ a $(O'; X, Y)$ indotta dal *Metodo del completamento dei quadrati*

$$\begin{cases} X = \overline{x} + \alpha \\ Y = \overline{y} + \beta \end{cases} \quad (4.19)$$

Per ottenere la forma canonica di C , cioè la sua equazione nel sistema $(O'; X, Y)$, basta operare la sostituzione inversa di (4.19) nell'equazione della conica in $(O; \overline{x}, \overline{y})$.

iv) Infine la rototraslazione da $(O; x, y)$ a $(O'; X, Y)$ si ottiene sostituendo la relazione inversa di (4.19) in (4.18). $\square$

Osservazione 4.3.1. Il precedente teorema può essere riformulato così: data una conica C esiste una rototraslazione φ tale che $\varphi(C)$ è espressa in forma canonica.

Corollario 4.3.3. *Data un'equazione di secondo grado in x e y a coefficienti reali, il luogo degli zeri (in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$) di tale equazione, se contiene almeno due punti reali, è uno dei seguenti luoghi geometrici: ellisse, iperbole, parabola, unione di due rette (distinte o coincidenti).*

4.4 Classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2$

Utilizzando i precedenti risultati, vedremo quali sono gli invarianti di una conica e come è possibile determinarne una forma canonica senza calcolare esplicitamente la rototraslazione.

Teorema 4.4.1. *Sia C una conica avente, come matrici completa e della forma quadratica, rispettivamente, B e A , nel riferimento $(O; x, y)$. Siano B' e A' le matrici associate a C (la cui equazione è ottenuta mediante cambio speciale di coordinate) nel riferimento $(O'; X, Y)$. Allora:*

- i) i polinomi caratteristici di A e di A' , $p_A(T)$ e $p_{A'}(T)$, coincidono;*
- ii) $\det(A) = \det(A')$ e $\text{rk}(A) = \text{rk}(A')$*
- iii) $\det(B) = \det(B')$ e $\text{rk}(B) = \text{rk}(B')$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.3.1, le matrici A e A' sono simili e le matrici B e B' sono congruenti (tramite una matrice Q di determinante 1). La tesi segue dalle Proposizioni 4.2.2 e 4.2.3. $\square$

Alla luce dei Teoremi 4.3.2 e 4.4.1, si può caratterizzare una conica nel piano euclideo mediante i determinanti delle matrici associate. Infatti, data una conica in forma generale, esiste un'isometria diretta del piano tale che la conica trasformata sia in forma canonica. Per quest'ultima è immediato calcolare i determinanti e i ranghi delle matrici associate; ma tali invarianti, come appena visto, si mantengono per isometria.

La seguente tabella contiene le possibili forme canoniche e i rispettivi invarianti numerici. Per convenzione, le forme paraboliche $(P.i)$ e $(P.ii)$ restano distinte e il coefficiente di x^2 (resp. y^2) è esattamente l'autovalore non nullo di A . Inoltre le coniche di tipo (E) ed (I) possono essere scritte anche entrambe nell'unica forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

dove α e β sono gli autovalori di A .

Entrambe queste convenzioni sono utili per esprimere in modo omogeneo le rispettive matrici complete delle coniche e per il “metodo rapido” di riduzione a forma canonica illustrato nella prossima Osservazione 4.4.1.

tipo	equazione	B	$\det(B)$	$\det(A)$
$P.i$	$\alpha x^2 = 2\gamma y, \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$	$-\alpha\gamma^2$	0
$P.ii$	$\beta y^2 = 2\gamma x, \gamma \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-\beta\gamma^2$	0
$P.iii$	$x^2 = \gamma (y^2 = \gamma)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$	0	0
$E.i$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_1$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.ii$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_2$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta > 0$
$E.iii$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_3$	0	$\alpha\beta > 0$
$I.i$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_4$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.ii$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} *_5$	$-\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta < 0$
$I.iii$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} *_6$	0	$\alpha\beta < 0$

Tabella delle forme canoniche in $\mathbb{E}^2$

dove si sono posti:

$$*_1 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = a^2b^2$$

$$*_2 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$$

$$*_3 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = a^2$$

$$*_4 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = a^2b^2$$

$$*_5 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2, \quad \gamma = -a^2b^2$$

$$*_6 \quad \alpha = b^2, \quad \beta = -a^2$$

Teorema 4.4.2. *Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un qualunque sistema di riferimento cartesiano. Allora:*

- a) C è degenera se e solo se $|B| = 0$; in particolare, è doppiamente degenera se e solo se $\text{rk}(B) = 1$;
- b) se C è non degenera allora:
 - C è una parabola se e solo se $|A| = 0$;
 - C è un'ellisse se e solo se $|A| > 0$;
 - C è un'iperbole se e solo se $|A| < 0$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema 4.3.2, dal Teorema 4.4.1 e dalla precedente tabella. $\square$

La discussione precedente fornisce un metodo per ottenere la forma canonica di una conica non degenera senza utilizzare le matrici di rototraslazione.

Osservazione 4.4.1 (*Metodo rapido di riduzione a forma canonica*).

Sia C una conica e siano A e B le matrici associate in un certo sistema di riferimento cartesiano.

i) Si determinano gli autovalori α e β della matrice A (cioè le radici, sicuramente reali, del polinomio caratteristico $p_A(T)$).

ii) Caso $\det(A) = 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, si può supporre $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.
- Se $\det(B) = -\alpha\gamma^2 \neq 0$, la conica è una parabola e si ha

$$\gamma = \pm \sqrt{-\frac{|B|}{\alpha}}$$

e quindi una forma canonica è $\alpha X^2 = 2\gamma Y$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenera e una sua forma canonica è $X^2 = \gamma$. Se $\gamma = 0$ allora C è unione di due rette reali e coincidenti; se $\gamma > 0$, C è unione di due rette reali e distinte, se $\gamma < 0$, C è unione di due rette complesse e coniugate. Si noti che, in questo caso, non si riesce a determinare γ partendo solo dalle matrici A e B .

iii) Caso $\det(A) \neq 0$.

- Poiché $\det(A) = \alpha\beta$, allora $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Inoltre $\det(B) = -\alpha\beta\gamma$.
- Se $\det(B) \neq 0$, la conica è un'ellisse o un'iperbole e si ha

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|}$$

e quindi una forma canonica della conica è $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$.

- Se $\det(B) = 0$, la conica è degenera e di forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 0$.

Esempio 4.4.1. Determiniamo una forma canonica della conica vista nell'Esempio 4.3.2

$$C : x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$$

con il metodo ora descritto.

Abbiamo già visto che le matrici associate a C sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$|B| = -16 \quad \text{e} \quad |A| = 0$$

la conica è non degenere ed è una parabola, infatti gli autovalori di A calcolati in precedenza sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Scegliendo dunque la forma (P.i):

$$\alpha X^2 = 2\gamma Y$$

poiché $\alpha = 2$ e $\det(B) = -\alpha\gamma^2$, si ha $\gamma^2 = 8$; scegliendo ad esempio $\gamma = -2\sqrt{2}$, si ottiene

$$2X^2 = -4\sqrt{2}Y$$

cioè

$$X^2 = -2\sqrt{2}Y.$$

L'altra scelta $\gamma = 2\sqrt{2}$ significa riferirsi ad un altro sistema di riferimento $(O'; \bar{X}, \bar{Y})$ nel quale la parabola ha equazione:

$$\bar{X}^2 = 2\sqrt{2}\bar{Y}.$$

Esempio 4.4.2. Determiniamo una forma canonica della conica

$$C : 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 5 = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

di determinanti, rispettivamente:

$$|B| = -11, \quad |A| = 2.$$

Quindi C è non degenere ed è una ellisse (reale). Determiniamone una forma canonica del tipo:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma,$$

dove α e β sono gli autovalori di A , $|A| = \alpha\beta$ e $|B| = -\alpha\beta\gamma$. Poiché

$$p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 4T + 2$$

gli autovalori di A sono

$$\alpha = 2 - \sqrt{2}, \quad \beta = 2 + \sqrt{2}.$$

Inoltre $\gamma = -|B|/|A| = 11/2$. Da cui segue che una forma canonica di C è

$$(2 - \sqrt{2})X^2 + (2 + \sqrt{2})Y^2 = \frac{11}{2}.$$

Si noti che anche in questo caso non è unica la forma canonica: infatti, scambiando gli autovalori α e β , la forma canonica risulta

$$(2 + \sqrt{2})\bar{X}^2 + (2 - \sqrt{2})\bar{Y}^2 = \frac{11}{2}.$$

Concludiamo col risultato più importante di questa sezione. Se richiediamo che una conica sia un insieme non vuoto di punti, oltre che soddisfare un'equazione del tipo (4.4), dobbiamo eliminare il caso (E.ii) dalla tabella precedente.

Teorema 4.4.3 (*Classificazione delle coniche nel piano euclideo reale*).
Ogni conica C in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ (costituita da almeno un punto reale) è definita, a meno di isometrie dirette, da un'equazione di una delle seguenti famiglie

(P) famiglie paraboliche:

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

$$x^2 = q^2, \quad q \neq 0$$

(E) famiglie ellittiche:

$$x^2 + p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$

$$x^2 + p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(I) famiglie iperboliche:

$$x^2 - p^2y^2 = q^2, \quad p, q \neq 0$$

$$x^2 - p^2y^2 = 0, \quad p \neq 0$$

(D) conica doppiamente degenera:

$$x^2 = 0$$

descritte dai parametri $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inoltre le famiglie precedenti sono distinte, a meno di isometrie.

Dimostrazione. Per i Teoremi 4.3.1 e 4.3.2, è sufficiente mostrare che ogni conica in forma canonica può essere trasformata in una conica delle precedenti famiglie attraverso un'isometria diretta.

Le forme canoniche delle coniche sono elencate nella Tabella precedente, ma bisogna tenere conto della limitazione dell'ipotesi: la conica deve contenere almeno un punto reale. Questo esclude alcune coniche degeneri paraboliche e precisamente quelle di tipo (P.iii) di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e le ellissi immaginarie (E.ii): entrambe, come osservato, non hanno punti reali.

Prendiamo dunque in esame le restanti forme canoniche della Tabella precedente.

(P.i) Per tali coniche è ovvio: basta dividere l'equazione per α e si ottiene la prima famiglia parabolica.

(P.ii) L'equazione è $\beta y^2 = 2\gamma x$ associata alla matrice B come nella Tabella. Si ponga

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

quindi è una conica di tipo (P.i) e dunque riconducibile alla prima famiglia parabolica.

(P.iii) Una conica di equazione $x^2 = \gamma$ ha punti reali se e solo se $\gamma \geq 0$. Quindi, nel caso $\gamma > 0$, possiamo scrivere la sua equazione come $x^2 = q^2$, ottenendo la seconda famiglia parabolica. Se invece $\gamma = 0$, otteniamo la conica doppiamente degenera denotata con (D) nell'enunciato.

(E.i) Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia ellittica.

(E.iii) Per tali coniche si procede come in (E.i), ottenendo la seconda famiglia ellittica.

(I.i) Tali coniche hanno equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e quindi, dividendo per b^2 si ottiene la prima famiglia iperbolica.

(I.ii) Basta applicare l'isometria associata alla matrice Q definita sopra e si ottiene una conica di tipo (I.i) e quindi riconducibile alla prima famiglia iperbolica.

(I.iii) Per tali coniche si procede come in (I.i), ottenendo la seconda famiglia iperbolica.

Per provare l'ultima affermazione, è sufficiente confrontare i determinanti delle matrici associate a ogni famiglia dell'enunciato e applicare "in negativo" il Teorema 4.4.1.

famiglia	$\det(B)$	$\det(A)$
$(P) - 1$	< 0	0
$(P) - 2$	0	0
$(E) - 1$	< 0	> 0
$(E) - 2$	0	> 0
$(I) - 1$	> 0	< 0
$(I) - 2$	0	< 0
(D)	0	0

Chiaramente le righe di questa tabella sono tutte distinte, eccetto la seconda famiglia parabolica e la conica (unica) doppiamente degenerare. In tal caso, però, il rango di B è diverso: vale 2 nel primo caso e 1 nel secondo. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 4.4.2. Come notato nella dimostrazione del precedente *Teorema di classificazione*, sono escluse le coniche di tipo $(P.iii)$ di equazione $x^2 = \gamma$ con $\gamma < 0$ e quelle di tipo $(E.ii)$ di equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$: infatti entrambe non hanno punti reali. La prima è unione di due rette complesse e coniugate $x = \pm\sqrt{\gamma}$ e la seconda è un'ellisse immaginaria.

Nell'analogo risultato di *Classificazione delle coniche nel piano euclideo complesso* (che qui omettiamo), entrambe vengono recuperate nelle famiglie elencate nel *Teorema di classificazione* visto sopra.

4.5 Studio di una conica in forma generale

Lo scopo di questo paragrafo è determinare i punti e le rette notevoli di una conica in forma generale. Strumento fondamentale sarà il Teorema 4.3.2 che qui ricordiamo:

Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ una conica data in un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$ con coordinate (x, y) . Allora esiste un riferimento cartesiano $(O', \mathcal{B}')$ con coordinate (X, Y) , ottenuto dal precedente mediante rototraslazione (isometria diretta), in cui C ha un'equazione in forma canonica.

Utilizzeremo la consueta notazione, introdotta nel Teorema 4.3.1, dove Q e P denotano, rispettivamente, le matrici completa e quella di rotazione associate al cambio (speciale) di riferimento

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & a \\ p_{21} & p_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

con $P \in SO(2)$ e vale la (4.14):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Chiaramente non è restrittivo supporre che $\mathcal{B}$ sia la base canonica, quindi P è la matrice le cui colonne sono i vettori della base (ortonormale) $\mathcal{B}'$.

Osservazione 4.5.1. I punti e le rette notevoli di una conica in forma canonica sono stati definiti e studiati nel Paragrafo 4.1: gli assi di una conica a centro sono gli assi coordinati X e Y , il suo centro è l'origine O' , i suoi vertici sono le intersezioni della conica con gli assi. Nel caso della parabola, il suo asse è l'asse Y e il vertice l'origine O' .

E' chiaro che basta applicare a tali punti e rette il cambio di coordinate inverso a quello descritto sopra per ottenerli nel riferimento $(O; x, y)$. Cercheremo invece strade alternative più brevi.

Iniziamo stabilendo alcune proprietà generali

Lemma 4.5.1. *Gli assi di simmetria e i centri di simmetria di un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ si mantengono per isometrie. Più precisamente, se f è un'isometria del piano, X un sottoinsieme di $\mathbb{E}^2$ e r è una retta asse di simmetria per X , allora $f(r)$ è asse di simmetria per $f(X)$. Inoltre, se M è centro di simmetria per X , allora $f(M)$ è centro di simmetria per $f(X)$.*

Dimostrazione. Per esercizio.

Proposizione 4.5.2. *Sia C una conica nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$.*

- i) Se C è una parabola allora il suo asse è asse di simmetria; inoltre il suo vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice;*
- ii) se C è un'ellisse (con fuochi distinti) o un'iperbole, allora i suoi assi sono assi di simmetria e il suo centro è (l'unico) centro di simmetria.*

Dimostrazione. Segue dal Lemma precedente e dal fatto che l'enunciato vale per coniche in forma canonica grazie alla Proposizione 4.1.1. $\square$

Vediamo ora come risolvere il problema iniziale: determinare gli assi e il centro di una conica a centro e l'asse e il vertice di una parabola, quando queste siano date in forma generale (senza trasformarla in forma canonica).

Proposizione 4.5.3. *Sia $(O; x, y)$ un riferimento cartesiano di $\mathbb{E}^2$ e sia C una conica a centro. Allora C ha per centro il punto O se e solo se nella sua equazione non compaiono i termini di primo grado.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che C sia non degenera e abbia equazione generale

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4.22)$$

Per la Proposizione 4.5.2, è sufficiente provare che O è suo centro di simmetria se e solo se $a_{13} = 0 = a_{23}$.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di C e $Q_0 = (-x_0, -y_0)$ il suo simmetrico rispetto a O . Se $a_{13} = 0 = a_{23}$ è chiaro che anche le coordinate di Q_0 soddisfano l'equazione (4.22) e dunque $Q_0 \in C$. Pertanto O è centro di simmetria della conica.

Viceversa, supponiamo che O sia il centro di simmetria della conica e si consideri un altro punto $P_1 = (x_1, y_1) \in C$ in modo che O, P_0, P_1 non siano allineati (tale punto esiste perché C è non degenera $\textcircled{A}$). Dunque anche il punto $Q_1 = (-x_1, -y_1)$, simmetrico di P_1 rispetto a O , appartiene alla conica. In conclusione:

$$P_0, Q_0 \in C \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \\ a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 - 2a_{13}x_0 - 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \end{cases}$$

e dal sistema precedente (ad esempio, sottraendo un'equazione dall'altra) segue $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 = 0$. In modo del tutto analogo, da $P_1, Q_1 \in C$ segue $a_{13}x_1 + a_{23}y_1 = 0$. Abbiamo quindi provato che, se O è centro di simmetria della conica, allora (a_{13}, a_{23}) è soluzione del sistema lineare nelle incognite u e v :

$$\begin{cases} ux_0 + vy_0 = 0 \\ ux_1 + vy_1 = 0 \end{cases}.$$

Ma il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo perché, per costruzione O, P_0, P_1 non sono allineati. Pertanto il sistema ha solo la soluzione nulla e quindi $(a_{13}, a_{23}) = (0, 0)$ come volevamo. $\square$

Esercizio C1. Provare il risultato precedente nel caso di conica degenera.

Esempio 4.5.1. Sia data la conica $\Gamma : 3x^2 + 4xy - y^2 + 3 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo.

Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -21$, Γ è non degenera ed è un'iperbole. Il suo centro è nell'origine per la Proposizione 4.5.3, in quanto la sua equazione non contiene i monomi di primo grado.

Teorema 4.5.4. Sia C una conica a centro di equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Il suo centro è il punto le cui coordinate (u, v) sono l'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{13} = 0 \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23} = 0 \end{cases}$$

avente come matrice completa quella costituita dalle prime due righe della matrice B associata alla conica.

Dimostrazione. La conica C ha per centro $M = (u, v)$ nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ se e solo se, operando la traslazione

$$\begin{cases} X = x - u \\ Y = y - v \end{cases}$$

nel sistema di coordinate X e Y ha per centro l'origine. Si operi dunque la sostituzione $x = X + u, y = Y + v$ nell'equazione di C , che diventa:

$$\begin{aligned} a_{11}(X + u)^2 + 2a_{12}(X + u)(Y + v) + a_{22}(Y + v)^2 + \\ + 2a_{13}(X + u) + 2a_{23}(Y + v) + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

ovvero, con un calcolo immediato e denotando con γ il termine costante, si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \\ + 2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})X + 2(a_{12}u + a_{22}v + a_{23})Y + \gamma = 0 \end{aligned}$$

Dalla Proposizione 4.5.3, tale conica ha per centro l'origine se e solo se i coefficienti dei monomi X e Y sono entrambi nulli. $\square$

Esempio 4.5.2. Sia data la conica $\Gamma : 3x^2 + 4xy - y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$; vogliamo vedere se è a centro e, in tal caso, determinarlo.

Consideriamo le matrici associate

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $|A| = -7$ e $|B| = -13$, Γ è non degenera ed è un'iperbole. Il suo centro si ottiene dal sistema i cui coefficienti sono le prime due righe di B :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

La soluzione è $(x, y) = (-1/7, -9/7)$, che sono le coordinate del centro di Γ .

Per determinare gli assi di una conica a centro (e l'asse di una parabola) occorre un fatto preliminare di algebra lineare. Valgono le notazioni ricordate all'inizio del paragrafo, in particolare si considerino due basi ortonormali $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^2$ e il cambio di riferimento di $\mathbb{E}^2$ da $(O, \mathcal{B})$ a $(O', \mathcal{B}')$ associato alla (4.21).

Lemma 4.5.5. *Sia $r \subset \mathbb{E}^2$ una retta di giacitura r_0 . Se $r_0 = \langle(\alpha, \beta)\rangle$ in $(O'; X, Y)$, allora la giacitura di r in $(O; x, y)$ è $r_0 = \langle(\gamma, \delta)\rangle$, dove*

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che si può riportare il problema in $\mathbb{R}^2$ in quanto la giacitura r_0 è un suo sottospazio vettoriale. Il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}'$ è quindi $(X, Y) = \lambda(\alpha, \beta)$. Poiché la matrice di cambio base è P e vale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

il generico vettore di r_0 sulla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

come volevamo. □

Tenendo conto dell'Osservazione 4.5.1 si prova il seguente risultato.

Proposizione 4.5.6. *Sia C una conica non degenera e siano B ed A le matrici ad essa associate in un qualunque sistema di riferimento $(O; x, y)$.*

- i) Se C è una conica a centro (non circonferenza), allora i suoi assi sono le due rette passanti per il centro e aventi come giaciture i due autospazi della matrice A ;*
- ii) se C è una parabola, allora il suo asse è la retta per il vertice e di giacitura l'autospazio della matrice A associato al suo autovalore nullo.*

Dimostrazione. Con le notazioni iniziali, indichiamo con $(O'; X, Y)$ il riferimento in cui C ha forma canonica e matrici B' e A' , dove $B' = {}^tQBQ$, $A' = P^{-1}AP$ e le matrici P e Q sono come in (4.20) e (4.21).

i) Gli assi di C sono ovviamente gli assi coordinati X e Y . Vogliamo determinare la loro giacitura in $(O; x, y)$.

A tal fine, utilizziamo il Lemma 4.5.5, osservando che in $(O'; X, Y)$ le loro giaciture sono ovviamente $\langle(1, 0)\rangle$ e $\langle(0, 1)\rangle$, quindi in $(O; x, y)$ sono, rispettivamente:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

Tenendo conto della costruzione della matrice P , ricordiamo che le sue colonne sono una base ortonormale di autovettori e quindi ognuna di esse genera un autospazio di A .

ii) Del tutto analogo, tenendo conto che l'asse di C è l'asse Y (come nella forma canonica $x^2 = qy$ nel *Teorema di classificazione delle coniche nel piano euclideo reale*) e quindi l'autovalore nullo è il secondo nella matrice A' . $\square$

Esempio 4.5.3. Sia Γ l'iperbole dell'Esempio 4.5.2. Abbiamo determinato il suo centro $M = (-1/7, -9/7)$. Per la Proposizione 4.5.6, gli assi di Γ sono le rette per M parallele agli autospazi di A . Per determinare tali autospazi, consideriamo la matrice della forma quadratica di Γ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $p_A(T) = |A - TI| = T^2 - 2T - 7$ e dunque $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ sono gli autovalori di A . Ne segue che gli autospazi, dati dalle formule

$$V_{\lambda_i} : (a_{11} - \lambda_i)x + a_{12}y = 0, \quad i = 1, 2$$

risultano essere

$$V_{\lambda_1} : (1 + \sqrt{2})x + y = 0, \quad V_{\lambda_2} : (1 - \sqrt{2})x + y = 0.$$

Pertanto gli assi hanno una equazione del tipo

$$a_1 : (1 + \sqrt{2})x + y + h_1 = 0; \quad a_2 : (1 - \sqrt{2})x + y + h_2 = 0.$$

Infine, imponendo il passaggio per M , si ottiene: $h_1 = (10 + \sqrt{2})/7$ e $h_2 = (10 - \sqrt{2})/7$.

Si noti che il Teorema 4.5.4 assieme alla Proposizione 4.5.6-(i), permettono di determinare assi e centro di una conica a centro; mentre dalla Proposizione 4.5.6-(ii) si può determinare l'asse di una parabola solo se è noto il vertice. Per calcolare quest'ultimo dovremo usare la nozione di retta tangente che verrà introdotta nel Paragrafo 4.6.

4.6 Coniche nel piano affine

In questo paragrafo, studieremo una generica conica C del piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. La sua equazione è sempre data da (4.4), ma qui la ripetiamo (con sua propria numerazione) in quanto l'ambiente geometrico non è più il piano euclideo. Sia dunque

$$C : \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (4.23)$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Affrontiamo lo studio delle possibili intersezioni di una retta e una conica in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (rispettivamente, in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Consideriamo una retta del piano affine che, per comodità di calcolo, assumiamo non parallela all'asse y

$$r : \quad y = mx + q.$$

I punti comuni a C ed r sono quelli le cui coordinate (x, y) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}x(mx + q) + a_{22}(mx + q)^2 + \\ \quad + 2a_{13}x + 2a_{23}(mx + q) + a_{33} = 0 \\ y = mx + q \end{cases} \quad (4.24)$$

La prima equazione di tale sistema è (in generale) di secondo grado nella sola variabile x , quindi ha al più due radici reali x_0, x_1 (distinte o no) che, sostituite nella seconda, forniscono le coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) (ove $y_i = mx_i + q$) dei punti di $C \cap r$.

Si osservi che, nel caso in cui la prima equazione abbia due soluzioni complesse (e coniugate in quanto i coefficienti sono reali) $x_0, \overline{x_0}$, si può procedere egualmente con la sostituzione e si determinano due punti di coordinate complesse (x_0, y_0) e $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$, ove $y_0 = mx_0 + q$.

Chiaramente, se r è parallela all'asse y , cioè di equazione $x = k$, si opera in modo del tutto analogo.

E' possibile che la prima equazione di (4.24) non sia di secondo grado: vedremo negli esempi seguenti che può essere di primo grado: in tal caso r e C si incontrano in un solo punto di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (e anche di $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Tuttavia la prima equazione di (4.24) può risultare anche di grado zero. Se è un'identità, e quindi $0 = 0$, significa che tutti i punti della retta

soddisfano il sistema e dunque $r \subset C$; tale situazione si verifica solo se C è degenere ed r è una delle due rette che costituiscono C .

Infine si può verificare il caso in cui l'equazione (di grado zero) non ha soluzioni: questo accade se $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (e anche in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$).

Abbiamo dunque provato la seguente:

Proposizione 4.6.1. *Una conica non degenere e una retta (reali) hanno al più due punti di intersezione in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.*

Esempio 4.6.1. Sia Γ la conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia r la retta $x = 1/2$. Allora $\Gamma \cap r$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3/4 \\ x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

cioè $\Gamma \cap r = \{(1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2)\}$.

Esempio 4.6.2. Siano date la conica e la retta

$$\Gamma : xy - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r : x = 3$$

Chiaramente $\Gamma \cap r = \{P = (3, 1/3)\}$ sia in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ che in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

Esempio 4.6.3. Siano

$$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad r : x = 3.$$

Allora $\Gamma \cap r$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = -8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2i\sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}.$$

Quindi $\Gamma \cap r = \{(3, 2i\sqrt{2}), (3, -2i\sqrt{2})\}$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, mentre $\Gamma \cap r = \emptyset$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Osservazione 4.6.1. Dalla dimostrazione della Proposizione 4.6.1 segue comunque che non si può presentare il caso che una conica Γ e una retta r reali abbiano due punti in comune in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$, di cui solo uno a coordinate reali; infatti se $(x_0, y_0) \in \Gamma \cap r$, allora anche $(\overline{x_0}, \overline{y_0}) \in \Gamma \cap r$.

☞ Fare un esempio di una retta r e una conica C tali che $r \cap C = \emptyset$ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ e anche in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

Dalla Proposizione 4.6.1 e dall'Osservazione 4.6.1 segue immediatamente la descrizione della posizione reciproca di una retta e una conica che si incontrano in 2 punti.

Proposizione 4.6.2. *Siano C ed r una conica e una retta reali aventi due punti in comune in $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$; allora tali punti sono di uno e uno solo dei seguenti tipi:*

- i) complessi e coniugati;*
- ii) reali e distinti;*
- iii) reali e coincidenti.*

□

Definizione 4.6.1. Siano C ed r una conica e una retta reali come nella Proposizione precedente. In corrispondenza dei 3 casi, introduciamo le seguenti nozioni:

- i) diciamo che r è *esterna* a C ;
- ii) diciamo che r è *secante* C nei due punti reali e distinti;
- iii) diciamo che la retta r è *tangente* C nel punto di intersezione.

Esempio 4.6.4. La conica e la retta dell'Esempio 4.6.1 sono secanti nei punti $(1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1/2, -\sqrt{3}/2)$; quelle dell'Esempio 4.6.3 sono esterne. Infine, la conica $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ e la retta $r : x = 1$ sono tangenti nel punto $(1, 0)$. Infatti dal calcolo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

si vede che l'equazione di secondo grado in una variabile nel sistema (4.24) non si abbassa di grado, come nell'Esempio 4.6.2, ma ha una radice di molteplicità 2. Diciamo in tal caso che si ottiene il punto $(1, 0)$ “contato due volte” o che tale punto è intersezione *doppia* (o di *molteplicità* 2) della conica e della retta.

Definizione 4.6.2. Per denotare la *molteplicità di intersezione* di una conica non degenera C e di una retta r in un punto P_0 scriveremo

$$m_{P_0}(C, r) = 0 \iff C \text{ e } r \text{ non si incontrano in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 1 \iff r \text{ è secante } C \text{ in } P_0$$

$$m_{P_0}(C, r) = 2 \iff r \text{ è tangente a } C \text{ in } P_0.$$

Proposizione 4.6.3. *Sia C una conica non degenera passante per l'origine, dunque di equazione*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Allora esiste ed è unica la retta tangente a C in $(0,0)$ ed è data da:

$$T_O(C) : a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo una generica retta per l'origine di giacitura $\langle(m,n)\rangle$, con $(m,n) \neq (0,0)$, cioè di equazioni cartesiane e parametriche date rispettivamente da

$$r_{m,n} : \quad nx - my = 0 \quad , \quad \begin{cases} x = m\lambda \\ y = n\lambda \end{cases}.$$

Vogliamo provare che esiste un'unica (a meno di coefficiente di proporzionalità) coppia (m,n) tale che $r_{m,n}$ sia tangente a C in $(0,0)$.

Chiaramente l'intersezione $r_{m,n} \cap C$ è data dall'equazione

$$(a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2)\lambda^2 + 2(a_{13}m + a_{23}n)\lambda = 0$$

e $\lambda = 0$ è soluzione doppia se e solo se $a_{13}m + a_{23}n = 0$.

Si osservi che non può essere $a_{13} = 0 = a_{23}$ altrimenti C avrebbe equazione $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ e quindi sarebbe degenera, in quanto il determinante della matrice associata risulta nullo.

Dunque il polinomio $a_{13}x + a_{23}y$ non è identicamente nullo. Pertanto $r_{m,n}$ è tangente a C in $(0,0)$ se e solo se

$$a_{13}m + a_{23}n = 0 \iff (m,n) = \rho(a_{23}, -a_{13}).$$

Tali coppie (m,n) , proporzionali tra loro, determinano dunque un'unica retta che è la retta tangente richiesta, avente equazione cartesiana data da $a_{13}x + a_{23}y = 0$. $\square$

Osservazione 4.6.2. Dalla proposizione precedente si ha immediatamente che, se C è una conica non degenera passante per l'origine, allora la retta $T_O(C)$ è definita dalla parte di primo grado dell'equazione di C .

Esempio 4.6.5. Sia C la conica di equazione

$$x^2 + 2xy - 7y^2 - x + 3y = 0.$$

Per la Proposizione 4.6.3, la retta tangente a C nell'origine è

$$T_O(C) : x - 3y = 0.$$

Il precedente risultato viene ora utilizzato per provare il caso generale.

Teorema 4.6.4. *Se C è una conica non degenera di equazione (4.23) e $P_0 = (x_0, y_0) \in C$, allora esiste ed è unica la retta tangente a C in P_0 ed ha equazione*

$$T_{P_0}(C) : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0$$

Dimostrazione. Ci riconduciamo al caso della Proposizione 4.6.3 operando la traslazione che manda P_0 nell'origine:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}.$$

Nel sistema di riferimento $(O'; X, Y)$ la conica ha equazione:

$$\begin{aligned} a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}(Y + y_0)^2 + \\ + 2a_{13}(X + x_0) + 2a_{23}(Y + y_0) + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

e dunque, per la Proposizione 4.6.3, la retta tangente a C in $O' = P_0$ è

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})X + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})Y = 0.$$

La tesi segue tenendo conto della traslazione precedente. $\square$

Osservazione 4.6.3. Ricordando le regole di derivazione, la retta tangente $T_{P_0}(C)$ a una conica non degenera C di equazione $f(x, y) = 0$ in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è data da:

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0. \quad (4.25)$$

Definizione 4.6.3. Si dice *vettore tangente* a C in P_0 , e si denota con $t_{P_0}(C)$, il vettore (parallelo alla retta $T_{P_0}(C)$)

$$t_{P_0}(C) := \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}.$$

Chiaramente $t_P(C)$ è definito a meno di un fattore di proporzionalità.

Esempio 4.6.6. Si calcoli l'equazione della retta $T_{P_0}(C)$ tangente alla conica $C : x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$ nel suo punto $P_0 = (2, 1)$.

Per l'Osservazione 4.6.3 la retta richiesta è individuata da

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{P_0} = (2x - 2y - 1)_{P_0} = 1, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{P_0} = (-2x + 6y)_{P_0} = 2$$

dunque $T_{P_0}(C) : (x - 2) + 2(y - 1) = 0$, cioè $x + 2y - 4 = 0$.

Esempio 4.6.7. Determinare le rette tangenti alla conica $C : y - x^2 = 0$ passanti per punto $P_0 = (2, 3)$ (si noti che $P_0 \notin C$).

La generica retta per P_0 ha equazione $r : y - 3 = m(x - 2)$; basta imporre che r intersechi C in due punti reali e coincidenti:

$$r \cap C : \begin{cases} y = m(x - 2) + 3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) + 3 \\ x^2 - mx + 2m - 3 = 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo richiedere che il discriminante della seconda equazione sia nullo:

$$\Delta = m^2 - 8m + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 6.$$

Pertanto le due rette tangenti richieste sono:

$$2x - y - 1 = 0, \quad 6x - y - 9 = 0.$$

Esempio 4.6.8. Si determinino le rette tangenti alla conica $C \subset \mathbb{E}^2$ (si osservi che in questo esercizio l'ambiente è il piano euclideo) di equazione $y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ e ortogonali alla retta $r : x - 3y + 5 = 0$; si determinino inoltre i corrispondenti punti di tangenza.

La generica retta ortogonale ad r ha un'equazione del tipo:

$$s_k : 3x + y + k = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo per quali k la retta s_k è tangente a C :

$$s_k \cap C : \begin{cases} 3x + y + k = 0 \\ y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-y - k}{3} \\ y^2 + 4y + 2k - 1 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione ha due radici coincidenti se e solo se

$$\Delta/4 = 4 - (2k - 1) = 0 \iff k = 5/2.$$

Dunque esiste un'unica retta tangente a C e ortogonale ad r ed è

$$s : 6x + 2y + 5 = 0.$$

Inoltre il suo punto di tangenza $P := s \cap C$ si calcola sostituendo $k = 5/2$:

$$\begin{cases} x = \frac{-y - 5/2}{3} \\ y^2 + 4y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y - 5}{6} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P = (-1/6, -2).$$

Resta da studiare il caso della tangenza a una conica degenera: lo vedremo nel prossimo paragrafo.

4.7 Punti singolari di una conica

Esempio 4.7.1. Vogliamo determinare la retta tangente (se esiste) alla conica degenera $C : (x + y)(x - y) = 0$ nel suo punto $(1, 1)$. Proviamo a utilizzare la formula (4.25). Poiché

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{(1,1)} = 2, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{(1,1)} = -2$$

si ottiene la retta

$$2(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0$$

che è proprio la retta, componente di C , cui appartiene il punto in questione. Si vede che, per ogni punto $P \neq O$ appartenente alla retta $x - y = 0$, la formula (4.25) fornisce la retta stessa; lo stesso accade per i punti della retta $x + y = 0$ diversi dall'origine.

Se invece si applica tale formula nel punto $O = (0, 0)$ (che è il punto di intersezione delle due rette componenti di C), si vede che entrambe le derivate parziali si annullano; dunque bisogna procedere al calcolo in modo alternativo. Ad esempio, si consideri la generica retta per l'origine $(x, y) = \lambda(m, n)$ e si intersechi con C : si ottiene l'equazione

$$\lambda^2(m^2 - n^2) = 0.$$

Quindi quasi ogni retta per O interseca C con molteplicità due. Si noti che per $[m, n] = [1, \pm 1]$, le rette corrispondenti (cioè le componenti della conica) intersecano C con molteplicità di intersezione "infinita". Ciò accade (con un calcolo analogo) per ogni punto $P \neq O$ della conica: la molteplicità di intersezione tra C e la retta componente contenente P è "infinita".

Occorre quindi estendere la definizione di retta tangente in modo da includere le coniche degeneri.

Definizione 4.7.1. Diciamo che una retta r è tangente a una conica C in un suo punto P_0 se

$$m_{P_0}(C, r) \geq 2.$$

Si osservi che, se C è non degenera, allora in ogni suo punto esiste un'unica retta tangente (vedi Teorema 4.6.4), che abbiamo denotato con $T_{P_0}(C)$ e $m_{P_0}(C, T_{P_0}(C)) = 2$ (vedi Proposizione 4.6.1).

Definizione 4.7.2. Diremo che un punto $P = (x_0, y_0)$ di una conica C di equazione $f(x, y) = 0$ è *singolare* per C se

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = (0, 0).$$

Altrimenti il punto $P \in C$ si dirà *semplice* o *non singolare*.

Proposizione 4.7.1. *Sia $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una conica degenera.*

- a) *Se C è unione di due rette distinte passanti per un punto P_0 , allora:*
- P_0 è il solo punto singolare di C ;
 - ogni retta per P_0 è tangente a C in tale punto;
 - se $P \neq P_0$, la retta tangente a C in P è la retta componente di C passante per P .
- b) *Se C è unione di due rette parallele e distinte allora C non ha punti singolari.*
- c) *Se C è doppiamente degenera allora ogni punto di C è singolare e ogni retta per esso è tangente a C .*

Dimostrazione. a) Possiamo assumere (a meno di rototraslazione) che P_0 sia l'origine $O = (0, 0)$ e che C abbia equazione

$$f(x, y) := x(ax + by) = 0$$

con $b \neq 0$, in quanto per ipotesi C è costituita da due rette distinte.

-) Sia $P = (\bar{x}, \bar{y}) \in C$; allora

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{(\bar{x}, \bar{y})} = 2a\bar{x} + b\bar{y}, \quad \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{(\bar{x}, \bar{y})} = b\bar{x}.$$

Il punto P è singolare se e solo se $(\bar{x}, \bar{y})$ è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $P = (0, 0)$.

-) Se $r_{m,n} : (x, y) = \lambda(m, n)$ è una qualunque retta per l'origine,

$$r_{m,n} \cap C : \begin{cases} x = \lambda m \\ y = \lambda n \\ x(ax + by) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 m(am + bn) = 0.$$

Quindi, per ogni $[m, n] \neq [0, 1]$ e $[m, n] \neq [b, -a]$ si ha

$$m_O(C, r_{m,n}) = 2$$

e le $r_{0,1}$ e $r_{b,-a}$, che sono esattamente le due componenti di C , intersecano C in O infinite volte. Pertanto ogni retta per O è tangente a C in O .

-) Per concludere, calcoliamo $T_P(C)$ dove $P \neq P_0$. Ora, invece, supponiamo che $P = (0, 0)$ e che C abbia equazione:

$$f(x, y) := x(ax + by + c) = 0$$

con $c \neq 0$, in quanto P è non singolare, per ipotesi.

Una retta $r : (x, y) = \lambda(m, n)$ è tangente a C se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione (almeno) doppia dell'equazione:

$$\lambda m(\lambda am + \lambda bn + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (am^2 + bmn)\lambda^2 + mc\lambda = 0$$

e ciò accade se e solo se $mc = 0$; tenendo conto che $c \neq 0$, deve essere $m = 0$ e quindi r è la retta $x = 0$, da cui la tesi.

b) Analoga all'ultima parte del caso (a).

c) Sia ora C l'unione di due rette coincidenti. Possiamo supporre che C abbia equazione

$$f(x, y) := x^2 = 0.$$

Poiché

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

le due derivate parziali sono entrambe nulle in tutti i punti della retta $x = 0$ e quindi in tutti i punti di C , che risultano dunque singolari. Infine si verifica facilmente che ogni retta che incontra C è tangente a C . $\square$

Valgono anche i viceversa della prima e della terza proprietà enunciate nella precedente proposizione.

Proposizione 4.7.2. *Se C è una conica con un punto singolare allora è degenera. In particolare,*

- a) *se C ha un solo punto singolare P_0 , allora C è semplicemente degenera e precisamente è l'unione di due rette passanti per P_0 (eventualmente complesse e coniugate);*
- b) *se C ha due punti singolari, allora ogni suo punto è singolare e in tal caso C è doppiamente degenera.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima che, se C è una conica con (almeno) un punto singolare, allora C è degenera. Possiamo supporre (a meno di una traslazione) che C , avente equazione (4.23), sia singolare in $P_0 = (0, 0)$. Allora, per definizione, entrambe le derivate parziali si annullano in P_0 , cioè il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{23} = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

ha per soluzione $(x_0, y_0) = (0, 0)$; pertanto $a_{13} = a_{23} = 0$. Sostituendo tali relazioni nell'equazione (4.23) di C e tenendo conto del fatto che $a_{33} = 0$, in quanto la conica passa per l'origine, si ha:

$$C : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Chiaramente tale equazione rappresenta l'unione delle due rette

$$\begin{aligned} r : a_{11}y &= \left(-a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) x \\ s : a_{11}y &= \left(-a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) x. \end{aligned}$$

a) Se l'origine è il solo punto singolare di C , allora il sistema (4.26) ha come unica soluzione $(0, 0)$, dunque il determinante della matrice dei coefficienti $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è non nullo. Pertanto le rette r ed s , determinate prima, sono distinte.

b) Se C ha due punti singolari, è degenerare per quanto visto sopra, ma non può essere semplicemente degenerare per la Proposizione 4.7.1-(a) – (b); pertanto deve essere doppiamente degenerare e quindi ogni suo punto è singolare per la Proposizione 4.7.1-(c). $\square$

I risultati della Proposizione 4.7.1 e Proposizione 4.7.2 si possono riassumere immediatamente nel seguente:

Teorema 4.7.3. *Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica. Valgono i seguenti fatti:*

- a) *se C è non degenerare allora non ha punti singolari;*
- b) *C è unione di due rette incidenti se e solo se ha un solo punto singolare;*
- c) *C è doppiamente degenerare se e solo se ha due (o, equivalentemente, infiniti) punti singolari.*

Vedremo che nel piano proiettivo vale anche il viceversa dell'implicazione (a) e che il caso (b) comprenderà anche la configurazione di due rette parallele (e quindi descriverà tutte le coniche semplicemente degeneri).

Concludiamo questo paragrafo tornando nel piano euclideo per risolvere una questione posta alla fine del Paragrafo 4.5, cioè determinare asse e vertice di una parabola.

Precedentemente abbiamo osservato come è possibile determinare la direzione dell'asse di una parabola in forma generale (vedi Proposizione 4.5.6). Per determinare il vertice di una parabola è necessario tuttavia applicare la nozione di retta tangente, osservando preliminarmente che una parabola è una conica non degenerare e quindi ammette un'unica retta tangente in ogni suo punto (vedi Teorema 4.7.3 e Teorema 4.6.4).

Lemma 4.7.4. *Si consideri una parabola $C \subset \mathbb{E}^2$ di vertice V . Allora V è l'unico punto di C in cui la retta tangente è ortogonale all'asse della parabola.*

Dimostrazione. Poiché si tratta di provare proprietà geometriche (euclidee), come al solito possiamo dimostrarle per una parabola in forma canonica. Sia dunque

$$C : f(x, y) := x^2 - 2py = 0.$$

È chiaro che il vertice di C è $V = (0, 0)$ e che $x = 0$ è l'asse.

La retta tangente a C in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$ è parallela al vettore

$$t_{P_0}(C) = \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{P_0} = (2p, 2x_0).$$

Ovviamente $(2p, 2x_0)$ è ortogonale all'asse $x = 0$ se e solo se

$$\langle (2p, 2x_0), (0, 1) \rangle = 0 \iff x_0 = 0 \iff P_0 = (0, 0) = V.$$

□

Osservazione 4.7.1 (*Metodo per la determinazione dell'asse e del vertice di una parabola*).

Sia C una parabola e siano B ed A le matrici ad essa associate in un sistema di riferimento $(O; x, y)$.

Ricordiamo che la matrice A ha un autovalore nullo e l'altro non nullo; sia questo α . Denotando i rispettivi autospazi con W_0 e W_α , essi sono ortogonali in quanto A è simmetrica reale.

Abbiamo visto che l'asse di C ha per giacitura W_0 (per la Proposizione 4.5.6), dunque W_α è la giacitura della retta tangente a C nel vertice, per il Lemma 4.7.4.

PROCEDURA

i) Si determinano gli autospazi W_0 e W_α ;

ii) sia r_h la generica retta di giacitura W_α con

$$r_h : ax + by + h = 0.$$

Si impone che r_h sia tangente a C e si determina il valore h_0 per cui ciò accade.

iii) Per il Lemma 4.7.4, la retta r_{h_0} è la tangente a C nel vertice. Dunque $V := C \cap r_{h_0}$ è il vertice di C .

iv) L'asse di C è dunque la retta $L = V + W_0$.

Osservazione 4.7.2 (*Metodo alternativo*).

- i')* Come *i*).
- ii')* Si calcola il vettore tangente $t_P(C)$ a C in un suo generico punto P .
- iii')* Si impone che $t_P(C)$ sia ortogonale a W_0 ; in tal modo si determina il punto in cui ciò accade: tale punto è il vertice.
- iv')* Infine si determina l'asse come prima.

Esempio 4.7.2. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola

$$C: 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0.$$

Poiché le matrici associate a C sono

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha: $\det(B) = -25 \neq 0$ e $\det(A) = 0$; quindi C è proprio una parabola. Calcoliamo l'autospazio W_0 di A , cioè lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$; poiché tale sistema ha rango 1, in quanto $\det(A) = 0$, esso risulta equivalente ad una sola delle due equazioni, ad esempio: $2x + y = 0$. Pertanto $W_0 = \langle (1, -2) \rangle$. Consideriamo la generica retta ortogonale a $(1, -2)$ (e quindi parallela alla tangente nel vertice):

$$r_h: x - 2y + h = 0.$$

La retta r_h è tangente a C se e solo se i due punti che costituiscono $r_h \cap C$ coincidono se e solo se il sistema

$$r_h \cap C: \begin{cases} x = 2y - h \\ 4(2y - h)^2 + 4(2y - h)y + y^2 - 2(2y - h) + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni coincidenti. Si impone tale condizione alla seconda equazione (in y):

$$25y^2 - 20hy + 4h^2 + 2h - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta/4 = 25(1 - 2h).$$

Quindi $\Delta = 0$ se e solo se $h_0 = 1/2$; otteniamo dunque la retta tangente nel vertice:

$$r_{h_0}: x = 2y - 1/2.$$

Pertanto il vertice V è dato da

$$V = r_{h_0} \cap C: \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ 25y^2 - 10y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1/2 \\ (5y - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi il vertice è il punto $V = (-1/10, 1/5)$.

Infine l'asse è la retta per V parallela all'autospazio $W_0 = \langle (1, -2) \rangle$:

$$2x + y = 0.$$

Esempio 4.7.3. Vogliamo determinare l'asse e il vertice della parabola nell'esempio precedente

$$C: \quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

usando il secondo metodo proposto nell'Osservazione 4.7.1. Come prima, si determina $W_0 = \langle (1, -2) \rangle$. Si calcola poi il vettore tangente a C nel suo generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} t_{P_0}(C) &= \left(-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{P_0} = \\ &= (-4x - 2y - 4, 8x + 4y - 2)_{P_0} = \\ &= 2(-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1). \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione $t_{P_0}(C) \perp W_0$, cioè

$$\langle (-2x_0 - y_0 - 2, 4x_0 + 2y_0 - 1), (1, -2) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + y_0 = 0.$$

Inoltre P_0 deve appartenere a C , quindi essere soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 0 \\ 4x_0^2 + 4x_0y_0 + y_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_0 = -2x_0 \\ -10x_0 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1/10, \quad y_0 = 1/5.$$

L'asse si determina come nell'esempio precedente.

4.8 Classificazione delle coniche affini

Al fine di classificare le coniche del piano affine (reale o complesso), dobbiamo usare alcuni risultati analoghi a quelli visti per le coniche del piano euclideo. Qui denotiamo con $\mathbb{A}^2$ il piano affine $\mathbb{A}_K^2$, dove $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ricordiamo brevemente il Teorema 1.10.1, Capitolo 1, dove viene descritta la variazione delle coordinate di un punto di $\mathbb{A}^2$ rispetto a 2 sistemi di riferimento $(O, \mathcal{B})$ e $(O', \mathcal{B}')$. Se $X = {}^t(x, y)$, $X' = {}^t(x', y')$, $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $C = {}^t(c_1, c_2)$ è la colonna delle coordinate di O rispetto a $(O', \mathcal{B}')$, allora si ha

$$X' = PX + C.$$

Si osservi che, in questo caso, P non è necessariamente una matrice ortogonale (come nel caso del piano euclideo $\mathbb{E}^2$) ma semplicemente invertibile. Denotiamo i suoi elementi con $P = (p_{ij})$.

Utilizzando la notazione – introdotta in (1.10), Capitolo 1 – si ponga

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & c_1 \\ p_{21} & p_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come ricordato, $P \in GL(2, K)$ e quindi $\tilde{Q} \in GL(3, K)$.

Con tali notazioni, vale l'analogo del Teorema 4.3.1, dove veniva descritto come varia l'equazione di una conica rispetto a 2 riferimenti cartesiani di $\mathbb{E}^2$. Omettiamo la dimostrazione in quanto identica a quella del teorema citato.

Teorema 4.8.1. *Siano $(O; x, y)$ e $(O'; x', y')$ due riferimenti affini di $\mathbb{A}^2$ e siano P e $\tilde{Q}$ come sopra. Sia $C \subset \mathbb{A}^2$ una conica e siano B e A le matrici di C nel riferimento $(O; x, y)$. Poste*

$$B' := {}^t\tilde{Q} B \tilde{Q} \quad e \quad A' := {}^tP A P$$

allora B' e A' sono matrici associate a C nel riferimento $(O'; x', y')$.

In particolare A e A' sono congruenti e B e B' sono congruenti.

Corollario 4.8.2. *Il rango della matrice completa B di una conica è un invariante affine. Se $K = \mathbb{R}$, anche il segno di $\det(A)$ è un'invariante affine.*

Dimostrazione. Immediata conseguenza della Proposizione 4.2.2. $\square$

Possiamo dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

Teorema 4.8.3 (Classificazione delle coniche nel piano affine reale).

Ogni conica del piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ (costituita da almeno un punto) è affinementemente equivalente a una delle seguenti:

$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	parabola
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	parabola degenera
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	ellisse
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	ellisse degenera
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	iperbole
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	iperbole degenera
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenera

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinementemente equivalenti.

Dimostrazione. Utilizziamo il Teorema 4.4.3 di classificazione delle coniche in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ e mostriamo che le famiglie ivi elencate sono equivalenti a una delle coniche di questo enunciato. Come al solito, denoteremo con B la matrice associata a una conica della lista del Teorema 4.4.3. Per ognuna di esse, individueremo una matrice $\tilde{Q} \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ risulti la matrice associata a una conica nella lista $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$.

(P) Vediamo in dettaglio la prima famiglia parabolica cioè

$$x^2 = qy, \quad q \neq 0$$

la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q/2 \\ 0 & -q/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente

$${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è associata alla conica $x^2 = y$.

Per le prossime famiglie, citiamo solo la matrice $\tilde{Q}$.

La seconda famiglia parabolica è $x^2 = q^2$; qui occorre considerare la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con un semplice calcolo si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 = 1$.

(E) La prima famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = q^2$. Usando la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$.

La seconda famiglia ellittica è $x^2 + p^2y^2 = 0$. Usando la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede che ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 0$.

(I) Le matrici $\tilde{Q}$ necessarie sono le stesse del caso (E) e trasformano le coniche delle famiglie $x^2 - p^2y^2 = q^2$ e $x^2 - p^2y^2 = 0$, rispettivamente, nelle coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$.

(D) La conica doppiamente degenere è esattamente $7_{\mathbb{R}}$.

Per provare che le coniche dell'enunciato sono a due a due non affinementemente equivalenti, consideriamo la seguente tabella

		rk(B)	det(A)
$1_{\mathbb{R}}$	$x^2 = y$	3	0
$2_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 1$	2	0
$3_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 1$	3	+
$4_{\mathbb{R}}$	$x^2 + y^2 = 0$	2	+
$5_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 1$	3	-
$6_{\mathbb{R}}$	$x^2 - y^2 = 0$	2	-
$7_{\mathbb{R}}$	$x^2 = 0$	1	0

Per il Corollario 4.8.2 si ha la tesi. $\square$

Vediamo l'analogo risultato nel caso complesso.

Teorema 4.8.4 (Classificazione delle coniche nel piano affine complesso).

Ogni conica del piano $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ è affinementemente equivalente a una delle seguenti:

$I_{\mathbb{C}}$	$x^2 = y$	parabola
$II_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 1$	parabola degenere
$III_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 1$	conica a centro
$IV_{\mathbb{C}}$	$x^2 + y^2 = 0$	conica a centro degenere
$V_{\mathbb{C}}$	$x^2 = 0$	conica doppiamente degenere

Inoltre le precedenti coniche sono, a due a due, non affinementemente equivalenti.

Dimostrazione. Basta mostrare che le seguenti coniche sono affinemente equivalenti a una di questo enunciato:

- (a) quelle elencate nel Teorema 4.8.3: $1_{\mathbb{R}}, \dots, 7_{\mathbb{R}}$;
- (b) quelle considerate nell'Osservazione 4.4.2, cioè le famiglie

$$x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0 \quad e \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

(a) Chiaramente basta esaminare le coniche $5_{\mathbb{R}}$ e $6_{\mathbb{R}}$. La prima ha equazione $x^2 - y^2 = 1$ e sia B la matrice associata. Basta scegliere come matrice $\tilde{Q} \in GL(3, \mathbb{C})$ la seguente

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In tal modo, ${}^t\tilde{Q}B\tilde{Q}$ è associata alla conica $x^2 + y^2 = 1$.
Del tutto analogo il caso della conica $6_{\mathbb{R}}$.

(b) La famiglia $x^2 = \gamma, \quad \gamma < 0$ va trattata come la seconda famiglia (P) nella dimostrazione del Teorema 4.8.3: basta scegliere la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

e si prova che è affinemente equivalente alla conica $II_{\mathbb{C}}$.

Infine l'ellisse immaginaria è affinemente equivalente alla conica $III_{\mathbb{C}}$ attraverso la matrice

$$\tilde{Q} := \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

L'ultima affermazione si prova come nel Teorema 4.8.3: qui è sufficiente esaminare il rango di B e la nullità di $\det(A)$. $\square$

Dallo studio precedente, si ha il seguente risultato che caratterizza le coniche affini degeneri e non degeneri e che è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 4.4.2).

Corollario 4.8.5. *Sia $C \subset \mathbb{A}_K^2$ con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Allora*

- *C è non degenera se e solo se $\text{rk}(B) = 3$;*
- *C è semplicemente degenera se e solo se $\text{rk}(B) = 2$;*
- *C è doppiamente degenera se e solo se $\text{rk}(B) = 1$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 4.8.2, il rango di B è un invariante affine. Quindi basta provare la tesi per le coniche dell'enunciato del Teorema 4.8.3 (nel caso reale) o del Teorema 4.8.4 (nel caso complesso). La tesi segue immediatamente dal calcolo dei ranghi nella parte finale delle rispettive dimostrazioni dei due teoremi citati. $\square$

In analogia a quanto visto nel Capitolo 3 sulla chiusura proiettiva di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, introduciamo l'analoga nozione per le coniche del piano affine.

Definizione 4.8.1. Si consideri un polinomio in due variabili a coefficienti in un campo K e di grado d :

$$f(x, y) \in K[x, y].$$

Diciamo *polinomio omogeneizzato di f rispetto a x_0* , e lo denotiamo con $F = {}^h f$, quello definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Esempio 4.8.1. Se $f(x, y) = x^2 + y - 1$ e $F = {}^h f$, allora

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} - 1 \right) = x_1^2 + x_0 x_2 - x_0^2.$$

Ricordiamo l'immersione del piano affine nel piano proiettivo (vedi Paragrafo 3.5)

$$j_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

definita da

$$(x, y) \mapsto [1, x, y] = [x_0, x_1, x_2], \quad \text{dove} \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

È chiaro dunque che, se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, allora

$$j_0(C) = \left\{ [x_0, x_1, x_2] \mid {}^h f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0, \quad x_0 \neq 0 \right\}.$$

Se togliamo la limitazione $x_0 \neq 0$, otteniamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$.

Definizione 4.8.2. Se $C \subset \mathbb{A}^2$ è una conica di equazione $f(x, y) = 0$, diciamo *chiusura proiettiva di C* , e la indichiamo con $\overline{C}$, il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2$ definito da

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = 0.$$

Inoltre, diciamo *punti impropri di C* i punti del piano proiettivo dati da $\overline{C} \cap \{x_0 = 0\}$, cioè quelli le cui coordinate omogenee soddisfano il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Come vedremo nel prossimo risultato, i punti impropri di una conica affine sono utili per classificarla facilmente. Prima di procedere, cambiamo la notazione (vedi (4.23)) usata fino ad ora per la generica conica affine.

Definizione 4.8.3. La generica conica di $\mathbb{A}_K^2$ è data da

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \quad (4.27)$$

dove $a_{ij} \in K$, e dunque la sua *matrice completa* e la sua *matrice della forma quadratica* risultano, rispettivamente,

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.8.6 (Classificazione delle coniche affini via i punti impropri).

Sia $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ una conica non degenera. Allora

- C è una parabola $\iff$ ha 2 punti impropri reali e coincidenti;
- C è un'ellisse $\iff$ ha 2 punti impropri complessi e coniugati;
- C è una iperbole $\iff$ ha 2 punti impropri reali e distinti.

Dimostrazione. Per definizione, i punti impropri di C sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente, del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

Poichè la prima equazione ha come discriminante $-\det(A)$, si conclude con il Teorema 4.4.2. $\square$

Concludiamo con una nota nozione sulle iperboli nel piano euclideo.

Definizione 4.8.4. Sia $C \subset \mathbb{E}^2$ un'iperbole. Si dicono *asintoti* di C le due rette (reali e distinte) passanti per il centro di C e per i suoi punti impropri.

Osservazione 4.8.1. Se l'iperbole C è data in forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cioè in coordinate omogenee} \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_0^2$$

i suoi punti impropri sono $P_\infty = [0, a, b]$ e $Q_\infty = [0, a, -b]$ e il centro è l'origine ovvero $[1, 0, 0]$. Pertanto gli asintoti sono

$$r_{P_\infty} : bx_1 - ax_2 = 0, \quad r_{Q_\infty} : bx_1 + ax_2 = 0.$$

Esercizio C2. Gli asintoti sono le rette tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri (estendendo in modo naturale la Definizione 4.6.1 di retta tangente a una conica in un suo punto al piano proiettivo...).

4.9 Coniche proiettive

Quanto visto alla fine del precedente paragrafo induce a introdurre la seguente nozione.

Definizione 4.9.1. Si dice *conica* del piano proiettivo $\mathbb{P}_K^2$ il luogo C dei punti le cui coordinate omogenee soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea del tipo

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

dove $a_{ij} \in K$ o, sinteticamente,

$$C : \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_ix_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Si dice *matrice associata* a C

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi si dice *equazione matriciale* di C quella espressa come

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

In analogia con quanto visto per le coniche affini, si prova in modo del tutto simile il seguente risultato.

Teorema 4.9.1. Siano $[x_0, x_1, x_2]$ e $[x'_0, x'_1, x'_2]$ due sistemi di coordinate omogenee di $\mathbb{P}_K^2$ e sia $\alpha : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ il cambio di coordinate omogenee associato a una matrice $Q \in GL(3, K)$ dove

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $C \subset \mathbb{P}_K^2$ una conica di matrice B rispetto alle coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e matrice B' rispetto alle coordinate $[x'_0, x'_1, x'_2]$. Allora

$$B' = {}^tQBQ.$$

Definizione 4.9.2. Due coniche C e C' di $\mathbb{P}_K^2$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività $\alpha : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ tale che $\alpha(C) = C'$.

Corollario 4.9.2. *Le matrici associate a due coniche proiettivamente equivalenti sono congruenti.*

Ricordando che matrici congruenti hanno lo stesso rango (vedi Proposizione 4.2.2), si ottiene immediatamente il seguente fatto.

Corollario 4.9.3. *Il rango di una matrice associata a una conica è un invariante proiettivo.*

Per questo, se C è una conica proiettiva di matrice B , denoteremo il rango di B anche con $\text{rk}(C)$.

Definizione 4.9.3. Una conica $C \subset \mathbb{P}_K^2$ si dice *semplicemente degenera* se è unione di due rette distinte e *doppiamente degenera* se è unione di due rette coincidenti. Altrimenti, diremo che C è *non degenera*.

Il seguente risultato, che caratterizza le coniche proiettive degeneri e non degeneri, è analogo a quello visto per le coniche euclidee (Teorema 4.4.2) e a quello relativo alle coniche affini (Corollario 4.8.5).

Partiamo da un semplice fatto.

Osservazione 4.9.1. La matrice completa B di una conica $C \subset \mathbb{A}_K^2$, con la notazione introdotta in (4.27), è esattamente la stessa della sua chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}_K^2$.

Teorema 4.9.4. *Sia $C \subset \mathbb{P}_K^2$ una conica di matrice associata B . Allora:*

1. $\text{rk}(B) = 3 \iff C$ è non degenera;
2. $\text{rk}(B) = 2 \iff C$ è semplicemente degenera;
3. $\text{rk}(B) = 1 \iff C$ è doppiamente degenera.

Dimostrazione. Ci sono due possibilità: o C è la chiusura proiettiva di una conica affine o C è degenera e una sua componente è la retta impropria. Nel primo caso, per l'Osservazione precedente, si conclude con il Corollario 4.8.5 che stabilisce l'analogo risultato per le coniche affini. Nel secondo caso, la conica $C \subset \mathbb{P}_K^2$ deve essere di uno dei seguenti tipi:

$$x_0(ax_0 + bx_1 + cx_2) = 0 \quad \text{o} \quad x_0^2 = 0.$$

Con un calcolo immediato, si vede che nel primo caso $\text{rk}(B) = 2$ e nel secondo $\text{rk}(B) = 1$. □

Ricordiamo il seguente importante risultato di Algebra lineare.

Teorema 4.9.5 (*Teorema di Sylvester*).

Sia K il campo complesso o quello reale e si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : K^n \times K^n \longrightarrow K.$$

Allora esiste una base $\mathcal{C}$ di K^n tale che la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica è congruente a una diagonale.

Vediamo le conseguenze nei casi complesso e reale, rispettivamente.

Teorema 4.9.6 (*Trasformazione ad assi principali su $\mathbb{C}$*).

Si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^n$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni).

Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{C})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 4.9.5, sia $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $\mathbb{C}^n$ tale che $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta)$ è diagonale. A meno di riordinare i vettori di $\mathcal{C}$, possiamo supporre

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_i \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$.

Si considerino ora gli scalari (che esistono in $\mathbb{C}$)

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r \quad \text{tali che} \quad \alpha_i^2 = \lambda_i, \quad \forall i = 1, \dots, r$$

e i vettori

$$w_1 := \frac{v_1}{\alpha_1}, \dots, w_r := \frac{v_r}{\alpha_r}, w_{r+1} := v_{r+1}, \dots, w_n := v_n.$$

E' immediato calcolare, per $i = 1, \dots, r$:

$$\beta(w_i, w_i) = \beta\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_i}{\alpha_i}\right) = \frac{\beta(v_i, v_i)}{\alpha_i^2} = 1.$$

Mentre, per $i = r + 1, \dots, n$ si ha

$$\beta(w_i, w_i) = \beta(v_i, v_i) = 0.$$

Dunque, posta $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, si ha che $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\beta)$ è come richiesta nell'enunciato. $\square$

Teorema 4.9.7 (*Trasformazione ad assi principali su $\mathbb{R}$*).
Si consideri una forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\beta)$ è

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dove gli zeri rappresentano matrici nulle di ordini opportuni).

Equivalentemente, per ogni matrice simmetrica $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ esiste una matrice $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Analoga alla precedente, ma in questo caso si riordinano gli elementi della diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}, 0, \dots, 0$ in modo che

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad \lambda_i < 0, \quad i = p+1, \dots, p+q.$$

Infine, si scelgono gli α_i in modo che $\alpha_i^2 = \lambda_i$, per $i = 1, \dots, p$, e $\alpha_i^2 = -\lambda_i$, per $i = p+1, \dots, p+q$. $\square$

Definizione 4.9.4. Se $B \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica congruente alla matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diciamo che la coppia di interi (p, q) è la *segnatura* di B .

Definizione 4.9.5. Diciamo *segnatura di una conica* $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la segnatura (p, q) di una sua matrice associata B , supponendo $p \geq q$ (non è restrittivo, in quanto anche $-B$ è associata alla stessa conica).

Osservazione 4.9.2. Per il Teorema 4.9.7, la segnatura (p, q) di una conica $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è un invariante proiettivo (con $p \geq q$). Inoltre $p + q = \text{rk}(C)$.

Osservazione 4.9.3. Si noti che un cambio di nome delle coordinate omogenee nell'equazione di una conica C corrisponde ad applicare un cambio Q di riferimento proiettivo, e quindi non si influenza né il rango né la segnatura di C . Ad esempio, lo scambio $x_0 \leftrightarrow x_2$ corrisponde alla matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Osservazione 4.9.4. Il Corollario 4.9.3 e i Teoremi 4.9.6 (nel caso complesso) e 4.9.7 (nel caso reale) di *Trasformazione ad assi principali* forniscono immediatamente la lista delle possibili equazioni delle coniche del piano proiettivo e quindi la classificazione delle coniche proiettive.

Tuttavia, nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi, si costruiscono esplicitamente i cambi di coordinate proiettive che “unificano” alcuni tipi di coniche affini. Le dimostrazioni risultano in tal modo costruttive (anche se ridondanti). Inoltre si verifica, nel caso reale, che due coniche sono proiettivamente equivalenti *se e solo se* hanno la stessa segnatura.

Teorema 4.9.8 (*Classificazione delle coniche proiettive reali*).

Ogni conica di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$(I)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(II)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(III)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(IV)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 - x_1^2 = 0$$

$$(V)_{\mathbb{R}} \quad x_0^2 = 0.$$

Dimostrazione. Utilizziamo la tabella compilata alla fine della dimostrazione del Teorema 4.8.3 sulla *classificazione delle coniche di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$* , riscrivendo (i polinomi che definiscono) le coniche in coordinate omogenee e aggiungendo due coniche degeneri (che denotiamo con S e D , semplicemente e doppiamente) aventi la retta impropria come componente. Inoltre aggiungiamo l'ellisse immaginaria (che denotiamo con E) che si era omessa nella classificazione affine in quanto priva di punti reali.

Invece della colonna che riportava il determinante di A , consideriamo la colonna della segnatura (p, q) , avendo osservato che $p + q = \text{rk}(C)$ e $p \geq q$.

		$\text{rk}(C)$	(p, q)
$1_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0x_2$	3	(2, 1)
$2_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_0^2$	2	(1, 1)
$3_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$	3	(2, 1)
$4_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 + x_2^2$	2	(2, 0)
$5_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2$	3	(2, 1)
$6_{\mathbb{R}}$	$x_1^2 - x_2^2$	2	(1, 1)
$7_{\mathbb{R}}$	x_1^2	1	(1)
E	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2$	3	(3, 0)
D	x_0^2	1	(1)
S	x_0x_1	2	(1, 1)

Proviamo ora che le seguenti coniche sono proiettivamente equivalenti:

-) $1_{\mathbb{R}} \sim 3_{\mathbb{R}} \sim 5_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$

Cambiando segno e nome alle variabili ($x_0 \leftrightarrow x_1$), $5_{\mathbb{R}}$ diventa $3_{\mathbb{R}}$. A sua volta, quest'ultima è congruente a $(II)_{\mathbb{R}}$, cambiando nome alle variabili. Infine, il cambio di coordinate Q applicato alla conica $1_{\mathbb{R}}$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene la matrice

$${}^tQBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

associata alla conica $(II)_{\mathbb{R}}$.

-) $2_{\mathbb{R}} \sim 6_{\mathbb{R}} \sim S \sim (IV)_{\mathbb{R}}$: analogo.

-) $7_{\mathbb{R}} \sim D \sim (V)_{\mathbb{R}}$: ovvio.

-) Infine si osservi che E è la conica $(I)_{\mathbb{R}}$ e che $4_{\mathbb{R}} \sim (III)_{\mathbb{R}}$ con un semplice cambio di variabili. $\square$

Teorema 4.9.9 (*Classificazione delle coniche proiettive complesse*).

Ogni conica di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:

$$(ND)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$(SD)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 + x_1^2 = 0$$

$$(DD)_{\mathbb{C}} \quad x_0^2 = 0$$

dove le precedenti sigle significano, rispettivamente, non degenerare, semplicemente degenerare, doppiamente degenerare.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.9.8, è sufficiente mostrare che:

-) $(I)_{\mathbb{R}} \sim (II)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q \in GL(3, \mathbb{C})$;
-) $(III)_{\mathbb{R}} \sim (IV)_{\mathbb{R}}$ attraverso una matrice $Q' \in GL(3, \mathbb{C})$.

Immediatamente si verifica che

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfano i precedenti requisiti. $\square$

Concludiamo questo paragrafo sulle coniche nel piano proiettivo studiando le intersezioni di una conica e una retta in $\mathbb{P}_K^2$, quando $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, completando e generalizzando i risultati riguardo alle coniche affini (vedi Proposizione 4.6.1, Proposizione 4.6.2 e Definizione 4.6.1).

Proposizione 4.9.10. *Una conica non degenera e una retta hanno esattamente due punti di intersezione in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, eventualmente coincidenti.*

Dimostrazione. Siano C la generica conica e r la generica retta di $\mathbb{P}^2$ di equazioni

$$C : \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad r : b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0.$$

Non è restrittivo supporre $b_0 \neq 0$; posti $c_1 := -b_1/b_0$ e $c_2 := -b_2/b_0$, si ha $r : x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. Quindi

$$C \cap r : \begin{cases} \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j & = & 0 \\ x_0 & = & c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

e sostituendo si ottiene, con opportuno cambio di nomi dei coefficienti,

$$C \cap r : \begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 & = & 0 \\ x_0 & = & c_1x_1 + c_2x_2 \end{cases}$$

Se la prima equazione è di secondo grado, avendo i coefficienti complessi ed essendo omogenea, ammette 2 radici in $\mathbb{C}^2$ (e tutte quelle proporzionali), che denotiamo con (y_1, y_2) e (z_1, z_2) . Ovviamente tali soluzioni possono essere coincidenti.

Sostituendole, rispettivamente, nella seconda equazione, otteniamo i due punti di intersezione di C e r :

$$[c_1y_1 + c_2y_2, y_1, y_2], \quad [c_1z_1 + c_2z_2, z_1, z_2].$$

Altrimenti l'equazione suddetta diventa l'identità $0 = 0$ e quindi sono soluzioni del sistema tutti i punti tali che $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2$. In altre parole, $C \cap r = r$, quindi C sarebbe degenera, contro l'ipotesi. $\square$

Definizione 4.9.6. In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ siano C una conica non degenera, r una retta e $C \cap r = \{P, Q\}$. Se $P \neq Q$, diciamo che C e r sono *secanti in P e Q* e che la *molteplicità di intersezione* di C e r in P (rispettivamente, in Q) è 1; scriveremo $m_P(C, r) = 1$ (rispettivamente, $m_Q(C, r) = 1$). Invece, se $P = Q$, diciamo che C e r sono *tangenti in P* e scriveremo $m_P(C, r) = 2$ o anche $C \cap r = \{P^2\}$.

Osservazione 4.9.5. Si può provare che, se $P \in C$ sono una conica non degenera e un suo punto del piano affine $\mathbb{A}^2$ e $t = T_P(C)$ è la retta tangente a C in P , allora (attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$) la chiusura proiettiva $\bar{t}$ è la retta tangente a $\bar{C}$ in P , nel senso della definizione precedente.

Esempio 4.9.1. Nel piano euclideo complesso una parabola e il suo asse si incontrano in un solo punto (il vertice). Nel piano proiettivo, hanno invece due punti in comune, secondo quanto visto nella precedente Proposizione. Vediamo un caso numerico.

Siano $C : y = x^2$ e $r : x = 0$. La loro intersezione in $\mathbb{P}^2$ è data da

$$C \cap r : \begin{cases} x_1^2 - x_0 x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_0 x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [0, 0, 1] = r_{\infty} \\ [1, 0, 0] = V \end{matrix}.$$

Ovviamente il primo dei due è un punto improprio (non rilevabile in $\mathbb{E}^2$), e precisamente è il punto improprio dell'asse r .

4.10 Dualità e sistemi lineari

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto l'equazione cartesiana di un iperpiano $H : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}_K^n$. Chiaramente questa non è unica: più precisamente, i suoi coefficienti sono determinati a meno di una costante moltiplicativa non nulla. Dunque un iperpiano non individua una $(n+1)$ -upla di K^{n+1} bensì infinite $(n+1)$ -uple proporzionali, cioè un *punto* di $\mathbb{P}_K^n$.

Ad esempio, se r è una retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

essa individua *univocamente* il punto di $\mathbb{P}^2$ dato da $[a_0, a_1, a_2]$.

È chiaro, inoltre, che le coordinate omogenee del punto $[a_0, a_1, a_2]$ dipendono dall'equazione di r e dunque dal riferimento proiettivo che si è fissato nel piano contenente r .

Per evitare confusione, useremo una notazione e una denominazione diversa per lo spazio proiettivo di dimensione 2 a cui appartiene $[a_0, a_1, a_2]$.

Definizione 4.10.1. Il piano proiettivo i cui punti rappresentano, come sopra, tutte le rette di $\mathbb{P}_K^2$ si dice *piano proiettivo duale* e si denota con $(\mathbb{P}_K^2)^*$ (equivalentemente, si può definire come $\mathbb{P}((K^3)^*)$).

EsPLICITAMENTE: se $\mathbb{P}_K^2$ è dotato di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, a una retta r di $\mathbb{P}_K^2$ corrisponde il punto r^* di $(\mathbb{P}_K^2)^*$ secondo la seguente corrispondenza (ovviamente biunivoca)

$$\delta : \{ \text{rette di } \mathbb{P}_K^2 \} \longleftrightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$$

definita da

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \longleftrightarrow r^* = [a_0, a_1, a_2].$$

Scambiando i ruoli di $\mathbb{P}_K^2$ e $(\mathbb{P}_K^2)^*$ (o, equivalentemente, di punti e rette), è naturale definire un'altra corrispondenza, anch'essa biunivoca,

$$\delta^* : \mathbb{P}_K^2 \longleftrightarrow \{ \text{rette di } (\mathbb{P}_K^2)^* \}$$

definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ di $(\mathbb{P}_K^2)^*$)

$$P = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \longleftrightarrow P^* : \alpha_0z_0 + \alpha_1z_1 + \alpha_2z_2 = 0$$

Definizione 4.10.2. Le due corrispondenze δ e δ^* sopra definite costituiscono la *relazione di dualità* fra $\mathbb{P}_K^2$ e $(\mathbb{P}_K^2)^*$.

Esempio 4.10.1. Il punto che rappresenta la retta $r : 2x_0 - x_1 + 5x_2 = 0$ è $r^* = [2, -1, 5] \in (\mathbb{P}^2)^*$. La retta che rappresenta il punto $P = [3, 0, 1]$ è la retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ di equazione $P^* : 3z_0 + z_2 = 0$.

Nella relazione di dualità si mantengono la relazione di appartenenza e quella di inclusione, ma i “soggetti” vengono scambiati. Lasciamo per esercizio la dimostrazione delle semplici proprietà elencate qui di seguito.

Proposizione 4.10.1. *Se P è un punto e r una retta di $\mathbb{P}_K^2$ allora*

$$P \in r \iff r^* \in P^*.$$

Se A e B sono due punti distinti e r è una retta di $\mathbb{P}_K^2$ allora

$$A, B \in r \iff r^* = A^* \cap B^*.$$

Se P è un punto e r e s sono due rette distinte di $\mathbb{P}_K^2$ allora

$$P = r \cap s \iff r^*, s^* \in P^*.$$

Dalla prima proprietà segue immediatamente che le rette di un fascio di rette di centro P sono rappresentate da tutti e soli i punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$. Questo rende precisa la frase “ $\mathcal{F}_P$ è un insieme di ∞^1 rette”.

Osservazione 4.10.1. Dalla terza proprietà segue che le rette del fascio $\mathcal{F}_P$, generato da r e s , corrispondono ai punti della retta P^* di $(\mathbb{P}^2)^*$ passante per i punti r^* e s^* . Esplicitamente: si consideri il fascio di rette di centro P in $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{F}_P : \lambda(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) = 0.$$

Allora tutte e sole le rette di $\mathcal{F}_P$ sono rappresentate dai punti di $(\mathbb{P}^2)^*$ appartenenti alla retta P^* passante per i punti $[a_0, a_1, a_2]$ e $[b_0, b_1, b_2]$. Più precisamente, se $r_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}_P$ il punto corrispondente nel piano duale è $\lambda[a_0, a_1, a_2] + \mu[b_0, b_1, b_2]$.

Esempio 4.10.2. Vogliamo rappresentare in $(\mathbb{P}^2)^*$ le rette del fascio di centro $P = [1, 2, 3]$, sia in forma cartesiana che in forma parametrica. Come visto, l'insieme richiesto è una retta del piano duale. Per ottenere la sua equazione cartesiana basta osservare che tale retta è

$$P^* : z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0.$$

D'altro canto, due rette passanti per P sono, ad esempio $x_1 - 2x_0 = 0$ e $x_2 - 3x_0 = 0$. Prendendo tali rette come generatori del fascio, abbiamo

$$\mathcal{F}_P : \lambda(x_1 - 2x_0) + \mu(x_2 - 3x_0) = 0.$$

Quindi P^* è la retta passante per $[-2, 1, 0]$ e $[-3, 0, 1]$, cioè

$$P^* : [z_0, z_1, z_2] = \lambda[-2, 1, 0] + \mu[-3, 0, 1]$$

e questa è l'equazione parametrica richiesta.

Infine osserviamo che le rette di $\mathcal{F}_P$ si ottengono da tutte le rette di $\mathbb{P}^2$ imponendo la *condizione lineare* di passaggio per P . Nell'esempio precedente $P = [1, 2, 3]$ e si impone alla generica retta del piano

$$r : z_0x_0 + z_1x_1 + z_2x_2 = 0$$

la condizione lineare

$$z_0 + 2z_1 + 3z_2 = 0,$$

che, come visto, è l'equazione cartesiana di P^* . Quindi i parametri omogenei $[z_0, z_1, z_2]$ devono soddisfare un'equazione lineare omogenea.

Risolvendo tale equazione, ad esempio ricavando $z_0 = -2z_1 - 3z_2$, si ottiene la generica retta del fascio di centro P (avendo posto $\lambda := z_1$ e $\mu := z_2$):

$$r_{\lambda, \mu} : (-2\lambda - 3\mu)x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2 = 0.$$

In modo del tutto analogo, si definisce lo *spazio proiettivo duale* di $\mathbb{P}_K^n$ e si denota con $(\mathbb{P}_K^n)^*$. Come prima, si pone la *relazione di dualità* fra $\mathbb{P}_K^n$ e $(\mathbb{P}_K^n)^*$ stabilita da δ e δ^* , dove

$$\delta : \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}_K^n\} \longleftrightarrow (\mathbb{P}_K^n)^*$$

è definita da

$$H : a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \longleftrightarrow H^* = [a_0, \dots, a_n].$$

e

$$\delta^* : \mathbb{P}_K^n \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } (\mathbb{P}_K^n)^*\}$$

è definita da (rispetto alle coordinate omogenee $[z_0, \dots, z_n]$ di $(\mathbb{P}_K^n)^*$)

$$P = [\alpha_0, \dots, \alpha_n] \longleftrightarrow P^* : \alpha_0z_0 + \cdots + \alpha_nz_n = 0$$

Anche in questo caso, vale la proprietà analoga a quella vista prima: se P è un punto e H un iperpiano di $\mathbb{P}_K^n$ allora

$$P \in H \iff H^* \in P^*.$$

Pertanto l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}_K^n$ passanti per un fissato punto P è parametrizzato dai punti dell'iperpiano P^* di $(\mathbb{P}_K^n)^*$. Come nel caso precedente, il passaggio per un punto è un esempio di *condizione lineare*.

Definizione 4.10.3. Si dice *sistema lineare di iperpiani di dimensione r* una famiglia di iperpiani di $\mathbb{P}_K^n$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}_K^n)^*$ di dimensione r .

Esempio 4.10.3. Consideriamo il sistema lineare dei piani di $\mathbb{P}^3$:

$$\mathcal{S} : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

e imponiamo la condizione lineare di passaggio per il punto $P = [-1, 2, 3, 4]$. Quest'ultima è

$$-a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0.$$

Pertanto $a_0 = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3$ e il sistema lineare dei piani passanti per P risulta dunque

$$\mathcal{S}_P : (2a_1 + 3a_2 + 4a_3)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

ed è ovviamente di dimensione 2: infatti è parametrizzato dal piano di $(\mathbb{P}^3)^*$ di equazione $-z_0 + 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 = 0$.

Richiedendo anche il passaggio per $Q = [0, 2, 1, 1]$, si ha l'ulteriore condizione lineare

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

quindi, complessivamente, si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 2:

$$\begin{cases} -a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -6a_1 - a_2 \\ a_3 = -2a_1 - a_2 \end{cases}.$$

Il sistema lineare dei piani passanti per P e Q risulta dunque

$$\mathcal{S}_{P,Q} : (-6a_1 - a_2)x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + (-2a_1 - a_2)x_3 = 0$$

e chiaramente ha dimensione 1: è un fascio di piani.

Infine, imponendo il passaggio per un terzo punto $R = [1, 0, 0, 0]$ si ottiene un sistema lineare omogeneo di rango 3 e, di conseguenza, un sistema lineare di piani di dimensione 0, cioè un unico piano.

Determinarlo per esercizio.

Definizione 4.10.4. Diciamo che ρ condizioni lineari omogenee sui coefficienti degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$, con $1 \leq \rho \leq n$, sono *indipendenti* se il rango del sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni è uguale a ρ .

Osservazione 4.10.2. Il sistema lineare degli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ che soddisfano ρ condizioni lineari indipendenti ha dimensione $n - \rho$. Infatti è parametrizzato dal sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ che è intersezione dei ρ iperpiani indipendenti corrispondenti ciascuno a una delle condizioni lineari.

Abbiamo visto prima che un esempio di condizione lineare è il passaggio per un punto fissato. Dall'Osservazione precedente segue dunque immediatamente il seguente risultato.

Proposizione 4.10.2. *Sia $1 \leq \rho \leq n$ e siano $P_1, \dots, P_\rho$ punti proiettivamente indipendenti di $\mathbb{P}^n$. Allora il passaggio per tali punti impone agli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ esattamente ρ condizioni lineari indipendenti. Dunque il sistema lineare degli iperpiani passanti per $P_1, \dots, P_\rho$ ha dimensione $n - \rho$.*

Dimostrazione. Si considerino le coordinate omogenee dei punti

$$P_i = [\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}], \quad i = 1, \dots, \rho.$$

Per ipotesi, tali punti sono indipendenti e quindi (vedi il Corollario 3.2.1 e la Definizione 3.2.2) la matrice $A \in K^{\rho, n+1}$, avente per righe le loro coordinate, ha rango ρ . D'altra parte, il passaggio per $P_1, \dots, P_\rho$ impone ai coefficienti z_i del generico iperpiano $z_0x_0 + \dots + z_nx_n = 0$ di $\mathbb{P}^n$ di soddisfare il sistema lineare omogeneo

$$AZ = 0, \quad \text{dove} \quad Z := {}^t(z_0, \dots, z_n).$$

Pertanto $AZ = 0$ è costituito da ρ equazioni indipendenti e il suo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^{n+1} di dimensione $n + 1 - \rho$. Il suo proiettivizzato è quindi un sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^n)^*$ di dimensione $n - \rho$, come volevamo. $\square$

4.11 Fasci di coniche

Introduciamo ora una costruzione come quella precedente, ma nell'ambito delle coniche del piano proiettivo.

A una conica di $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}_K^2$ (con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) di equazione

$$C : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (4.28)$$

si può associare l'insieme dei suoi possibili coefficienti

$$\{k(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) \mid k \in K^*\}$$

che è un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5$. In tal modo, si individua una corrispondenza biunivoca:

$$\psi : \{\text{coniche di } \mathbb{P}^2\} \longleftrightarrow \mathbb{P}^5$$

definita da

$$C \mapsto [a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

Tale applicazione è ben definita. Nel seguito denoteremo quindi, i coefficienti $[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ della generica conica anche con le coordinate omogenee $[z_0, \dots, z_5]$ di $\mathbb{P}^5$.

Esempio 4.11.1. Il punto di $\mathbb{P}^5$ associato alla conica $y = 3x^2$, secondo la corrispondenza ψ sopra definita, è $[0, 0, -1/2, 3, 0, 0]$.

Diciamo dunque che le coniche del piano sono *parametrizzate* da $\mathbb{P}^5$.

Definizione 4.11.1. Si dice *sistema lineare di coniche di dimensione r* una famiglia di coniche di $\mathbb{P}^2$ i cui coefficienti sono parametrizzati da un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ di dimensione r , con $0 \leq r \leq 5$.

In particolare, le coniche del piano costituiscono un sistema lineare di dimensione 5, che è l'intero $\mathbb{P}^5$. E una sola conica è un sistema lineare di dimensione 0.

In analogia con quanto visto nel paragrafo precedente, introduciamo la seguente nozione.

Definizione 4.11.2. Si dice *condizione lineare* sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ un'equazione lineare omogenea nei coefficienti della generica conica.

In altri termini, è l'equazione di un iperpiano di $\mathbb{P}^5$, dove quest'ultimo parametrizza (tramite ψ) le coniche di $\mathbb{P}^2$, dunque è della forma

$$m_0z_0 + \dots + m_5z_5 = 0,$$

dove $m_i \in K$ per ogni i .

Esempio 4.11.2. Sono condizioni lineari sulle coniche di $\mathbb{P}^2$ le equazioni $a_{11} + a_{22} = 0$ (o, equivalentemente, $z_3 + z_5 = 0$), $2a_{12} - 3a_{02} = 0$ (o, equivalentemente, $2z_4 - 3z_2 = 0$), ecc.

Definizione 4.11.3. Diciamo che s condizioni lineari sulle coniche sono *indipendenti* se il sistema lineare omogeneo costituito da tali equazioni ha rango s , i.e. è del tipo

$$MZ = 0, \quad \text{dove} \quad M \in K^{s,6}, \quad \text{rk}(M) = s$$

avendo posto

$$Z = {}^t[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5] = {}^t[a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}].$$

In altri termini, se il sistema lineare omogeneo $MZ = 0$ è l'equazione cartesiana di un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^5$ avente codimensione s .

Da questa definizione segue ovviamente che il numero s di condizioni indipendenti deve verificare $1 \leq s \leq 5$.

Si ha immediatamente il seguente fatto.

Proposizione 4.11.1. *Le coniche di $\mathbb{P}^2$ che soddisfano s condizioni lineari indipendenti costituiscono un sistema lineare di coniche di dimensione $5 - s$.*

L'esempio più semplice di condizione lineare è il passaggio per un punto.

Esempio 4.11.3. Determinare la condizione lineare che esprime il passaggio per $P = [1, 0, 0]$ e l'equazione del sistema lineare $\mathcal{S}_P$ (di dimensione 4) di tutte le coniche per P .

Imponiamo il passaggio per P alla generica conica di equazione (4.28), ottenendo $a_{00} = 0$. Pertanto

$$\mathcal{S}_P : 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Si noti che ha dimensione 4 in quanto parametrizzato dall'iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $z_0 = 0$. Infatti, nell'equazione di $\mathcal{S}_P$ compaiono 5 parametri omogenei indipendenti.

Vogliamo trovare un risultato analogo a quello della Proposizione 4.10.2, cioè determinare il numero e la posizione reciproca di punti che impongano condizioni indipendenti al sistema lineare delle coniche.

Ricordiamo che, in $\mathbb{P}^2$ il numero massimo di punti proiettivamente indipendenti è 3 (vedi Definizione 3.2.2), quindi dovremo utilizzare la nozione più ampia di punti in posizione generale.

Lemma 4.11.2. *Si consideri un sistema di s condizioni lineari indipendenti sui coefficienti (con $1 \leq s \leq 4$)*

$$MZ = 0, \quad M = (m_{ij}) \in K^{s,6} \quad (4.29)$$

e si consideri una ulteriore condizione lineare

$$h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 = 0. \quad (4.30)$$

Allora le $s + 1$ condizioni

$$\Sigma : \begin{cases} MZ & = 0 \\ h_0 z_0 + \cdots + h_5 z_5 & = 0 \end{cases}$$

sono indipendenti se e solo se esiste almeno una conica che soddisfa (4.29) ma non soddisfa (4.30).

Dimostrazione. Per ipotesi $\text{rk}(M) = s$ o, equivalentemente, per la Proposizione 4.11.1, $\dim \mathcal{S}_M = 5 - s$, dove $\mathcal{S}_M$ è il sistema lineare delle coniche che soddisfano la (4.29).

Inoltre, per lo stesso motivo, le $s + 1$ condizioni in Σ sono indipendenti se e solo se

$$\text{rk} \begin{pmatrix} & M & \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{pmatrix} = s + 1$$

e questo equivale a $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s + 1)$. Poiché si hanno ovviamente le inclusioni di sottospazi proiettivi

$$\mathcal{S}_\Sigma \subseteq \mathcal{S}_M \subset \mathbb{P}^5$$

è chiaro che $\dim \mathcal{S}_\Sigma = 5 - (s + 1)$ se e solo se la precedente inclusione è stretta se e solo se se esiste almeno una conica che soddisfa (4.29) ma non soddisfa (4.30). $\square$

Teorema 4.11.3. *Si consideri il sistema lineare di equazione (4.28) costituito da tutte le coniche di $\mathbb{P}^2$ e si imponga ad esso il passaggio per i punti $P_1, \dots, P_s$, dove $1 \leq s \leq 5$. Se tali punti sono in posizione generale, allora le s condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti.*

Dimostrazione. Proviamo l'affermazione nei vari casi.

(a) Se $s = 1$, l'affermazione è ovvia.

(b) Se $s = 2$ e P_1, P_2 sono distinti, allora le 2 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1 ma non P_2 . Poiché i punti sono distinti, esiste una retta r per P_1 e non per P_2 ; basta considerare la conica doppiamente degenera r^2 .

(c) Se $s = 3$ e P_1, P_2, P_3 non sono allineati (e in particolare sono distinti), allora le 3 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il

punto (b) le 2 condizioni di passaggio per P_1 e P_2 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1 e P_2 ma non P_3 . Poiché i 3 punti non sono allineati, se r è la retta per P_1 e P_2 , allora $P_3 \notin r$. Dunque r^2 è una conica che prova la tesi.

(d) Se $s = 4$ e P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale (e in particolare sono distinti), allora le 4 condizioni lineari corrispondenti sono indipendenti. Infatti, per il punto (c) le 3 condizioni di passaggio per P_1, P_2, P_3 sono indipendenti. Dunque, per il Lemma 4.11.2, basta trovare una conica che contiene P_1, P_2, P_3 ma non P_4 . Sia r è la retta per P_1 e P_2 e s è la retta per P_2 e P_3 , dall'ipotesi si ha che $P_4 \notin (r \cup s)$ e quindi $r \cup s$ è una conica che prova la tesi.

(e) Analogamente: concludere per esercizio. $\square$

Tale risultato, con la Proposizione 4.11.1, ha due immediate conseguenze.

Corollario 4.11.4. *Per 5 punti in posizione generale passa una ed una sola conica.*

Esercizio C3. Si provi che per 5 punti, dei quali al massimo 3 sono allineati, passa una ed una sola conica.

Corollario 4.11.5. *Le coniche del piano passanti per 4 punti in posizione generale costituiscono un sistema lineare di dimensione 1.*

Tali sistemi lineari saranno l'oggetto di studio di quest'ultima parte del corso: vedremo come descriverli e come classificarli.

Definizione 4.11.4. Un sistema lineare di coniche di dimensione 1 si dice *fascio di coniche*.

Un fascio è parametrizzato da una retta di $\mathbb{P}^5$ del tipo

$$[z_0, \dots, z_5] = \lambda[\alpha_0, \dots, \alpha_5] + \mu[\beta_0, \dots, \beta_5].$$

Mediante la corrispondenza biunivoca ψ , al punto $[z_0, \dots, z_5]$ corrisponde la conica $\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = 0$, mentre ai punti $[\alpha_0, \dots, \alpha_5]$ e $[\beta_0, \dots, \beta_5]$ corrispondono, rispettivamente, due specifiche coniche C e D di equazioni

$$C : f(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad \text{e} \quad D : g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Pertanto ogni conica del fascio è descritta da un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j = \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2).$$

Definizione 4.11.5. L'equazione

$$\mathcal{F} : \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad (4.31)$$

con $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$, si dice *equazione cartesiana del fascio* $\mathcal{F}$. Inoltre le coniche $C : f(x_0, x_1, x_2) = 0$ e $D : g(x_0, x_1, x_2) = 0$ si dicono *generatori* di $\mathcal{F}$.

Anche in questo contesto (come accadeva per i fasci di rette nel piano o i fasci di piani nello spazio), i generatori di un fascio di coniche non sono univocamente individuati. Anzi, una qualunque coppia di coniche distinte del fascio può generare il fascio stesso. Inoltre, dall'equazione (4.31) è chiaro che un punto è comune a tutte le coniche di un fascio se e solo se appartiene a entrambi i generatori.

Definizione 4.11.6. Un punto P del piano si dice *punto base* di un fascio $\mathcal{F}$ se appartiene a tutte le coniche di $\mathcal{F}$.

Esempio 4.11.4. Calcoliamo i punti base del fascio

$$\mathcal{F} : \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Come osservato, sono i punti comuni ai due generatori e quindi corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, \pm 1), (\pm 1, 0).$$

Nel prossimo paragrafo classificheremo i vari tipi di fasci a seconda dei loro punti base. Iniziamo qui con una prima suddivisione relativa alle coniche degeneri e non degeneri.

Proposizione 4.11.6. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$. Allora si presenta uno e uno solo dei due casi:

- i) $\mathcal{F}$ contiene esattamente 3 coniche degeneri, eventualmente coincidenti;
- ii) $\mathcal{F}$ è costituito solo da coniche degeneri.

Dimostrazione. Sia $C_{\lambda, \mu}$ la generica conica di $\mathcal{F}$ della forma

$$C_{\lambda, \mu} : \lambda f(x_0, x_1, x_2) + \mu g(x_0, x_1, x_2) = 0$$

dove

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad g(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$$

sono due polinomi omogenei di secondo grado che definiscono i due generatori di $\mathcal{F}$, rispettivamente. La matrice associata alla conica $C_{\lambda,\mu}$ è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{02} + \mu b_{02} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 4.9.4, la conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere se e solo se $\det(B_{\lambda,\mu}) = 0$. Chiaramente, $\det(B_{\lambda,\mu})$ è un polinomio omogeneo in λ e μ . Se è non nullo, tale polinomio ha grado 3 e quindi ha 3 radici (e tutte quelle proporzionali), non necessariamente distinte, che denotiamo con

$$[\lambda_1, \mu_1], \quad [\lambda_2, \mu_2], \quad [\lambda_3, \mu_3].$$

Dunque C_{λ_i, μ_i} , per $i = 1, 2, 3$, sono tutte e sole le coniche degeneri di $\mathcal{F}$. Se invece $\det(B_{\lambda,\mu})$ è il polinomio nullo allora ogni conica $C_{\lambda,\mu}$ è degenere. $\square$

Definizione 4.11.7. Un fascio di coniche si dice *degenere* se tutte le sue coniche sono degeneri. Si dice *non degenere* altrimenti.

Nella ricerca dei punti base di un fascio si può procedere determinando i punti comuni a due generatori del fascio stesso. È naturale dunque chiedersi in quanti punti si incontrano due coniche.

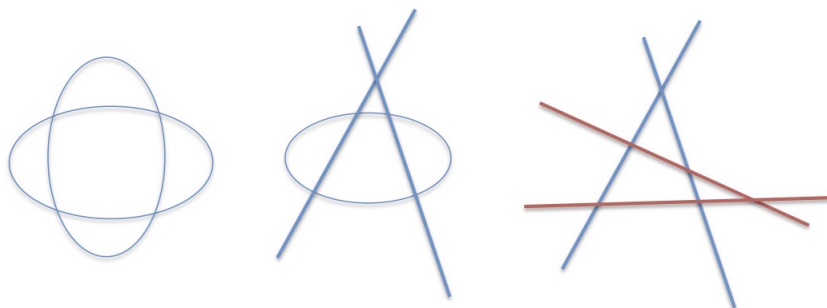
Teorema 4.11.7. Due coniche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ senza componenti comuni si intersecano esattamente in 4 punti, eventualmente coincidenti.

Dimostrazione. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}^2$. Ci sono 3 possibilità:

I) entrambe sono degeneri; in tal caso, poiché non hanno componenti in comune, la tesi segue banalmente.

II) Una è degenere e l'altra no. In tal caso, sia C non degenere e $D = r \cup s$ (con r e s coincidenti o meno). Allora $C \cap D = C \cap (r \cup s) = (C \cap r) \cup (C \cap s)$ e si conclude con la Proposizione 4.9.10.

III) Entrambe sono non degeneri. I punti di intersezione di C e D sono i punti base del fascio (non degenere) $\mathcal{F}$ generato da C e D . Ma, per la Proposizione 4.11.6, $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere D' ; ovviamente $C \cap D = C \cap D'$ e si conclude con quanto visto nella parte (II). $\square$



Definizione 4.11.8. Siano C e D due coniche di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ senza componenti comuni. Definiamo la *molteplicità di intersezione* di C e D in un punto comune P , e la denotiamo con $m_P(C, D)$, come segue:

- i) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ allora $m_{P_i}(C, D) = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$;
- ii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 2$ (e $m_{P_2}(C, D) = 1 = m_{P_3}(C, D)$). Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2, P_3\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *tangenti* in P_1 .
- iii) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_i}(C) = T_{P_i}(D)$, per $i = 1, 2$, allora $m_{P_i}(C, D) = 2$, per $i = 1, 2$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^2, P_2^2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono tangenti sia in P_1 che in P_2 .
- iv) Se $C \cap D = \{P_1, P_2\}$ e $T_{P_1}(C) = T_{P_1}(D)$, ma $T_{P_2}(C) \neq T_{P_2}(D)$ allora $m_{P_1}(C, D) = 3$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^3, P_2\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *osculanti* in P_1 .
- v) Se $C \cap D = \{P_1\}$ allora $m_{P_1}(C, D) = 4$. Scriveremo anche $C \cap D = \{P_1^4\}$. In tal caso, diremo che C e D sono *iperosculanti* in P_1 .

Corollario 4.11.8. *Un fascio non degenero di coniche ha esattamente 4 punti base in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, eventualmente coincidenti.*

Dimostrazione. Per definizione, in un fascio non degenero $\mathcal{F}$ c'è (almeno) una conica non degenero C . Se D è un'ulteriore conica di $\mathcal{F}$, possiamo considerarle come generatori del fascio. Pertanto i punti base di $\mathcal{F}$, come osservato in precedenza, sono esattamente i punti di $C \cap D$. Essendo C non degenero, non ha componenti in comune con D e quindi, per il Teorema 4.11.7, $C \cap D$ è costituita da 4 punti, eventualmente coincidenti. $\square$

Tale risultato e il Corollario 4.11.5 suggeriscono che la “configurazione” dei punti base di un fascio di coniche ne determina la struttura.

Quanto visto finora per i fasci di coniche proiettive, può essere espresso in modo analogo nel piano affine o euclideo, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.11.5. Determinare il fascio $\mathcal{F}$ generato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e dall'unione degli assi cartesiani di $\mathbb{E}^2$. Il fascio richiesto ha equazione, in $\mathbb{E}^2$,

$$\mathcal{F} : \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu xy = 0.$$

Lo stesso fascio è descritto in $\mathbb{P}^2$ dall'equazione

$$\mathcal{F} : \lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

4.12 Classificazione dei fasci di coniche

Abbiamo visto nel Paragrafo 11 che l'esempio più semplice di condizione lineare sulle coniche è il passaggio per un punto. Ma non è l'unico. Infatti, anche se la tangenza a una retta data impone una condizione *quadratica* sui coefficienti della generica conica, la tangenza a una retta in un suo punto equivale a due condizioni lineari, come mostra il seguente risultato.

Lemma 4.12.1. *In $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ la tangenza a una retta t in un suo punto P impone al sistema lineare delle coniche due condizioni lineari indipendenti.*

Dimostrazione. Si verifica (per esercizio) che non è restrittivo supporre che $t : x_2 = 0$ e $P = [1, 0, 0]$. Come al solito, consideriamo l'equazione (4.28)

$$C : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Imponiamo il passaggio per P , ottenendo $a_{00} = 0$. Intersecando C e t si ha

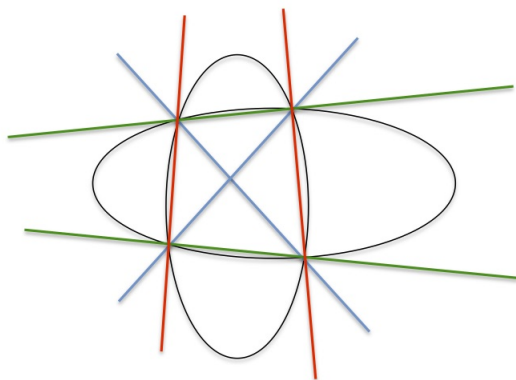
$$\begin{cases} 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(2a_{01}x_0 + a_{11}x_1) &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases}$$

e quest'ultimo sistema ha per soluzione P^2 se e solo se $a_{01} = 0$. Si osservi, infine, che le condizioni $a_{00} = 0$ e $a_{01} = 0$ sono ovviamente indipendenti. $\square$

Nel seguito, siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e r_{ij} la retta per P_i e P_j , per $i, j = 1, 2, 3, 4$. Si prova (usando il Teorema fondamentale delle proiettività) che non è restrittivo fissare i punti e le rette in gioco e operare nel piano euclideo.

Proposizione 4.12.2. *Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti e in posizione generale e sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche avente tali punti come punti base. Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degeneri e le sue 3 coniche degeneri sono $C_1 := r_{12} \cup r_{34}$, $C_2 := r_{23} \cup r_{14}$, $C_3 := r_{24} \cup r_{13}$.*

Dimostrazione. La famiglia $\mathcal{F}$ è un fascio per il Corollario 4.11.5. Inoltre $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{F}$ e sono le uniche degeneri contenenti i 4 punti. $\square$



Proposizione 4.12.3. *Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti e in posizione generale (cioè non allineati) e sia t una retta contenente P_3 ma non P_1 e P_2 . Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche passanti per i 3 punti e tangenti a t in P_3 . Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono $r_{13} \cup r_{23}$ (contata due volte) e $t \cup r_{12}$ e i suoi punti base sono P_1, P_2, P_3^2 .*

Dimostrazione. Possiamo scegliere $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, 0)$ e $t : x + y = 0$. La generica conica tangente a t in P_3 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta(x + y) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_1 e P_2 si ottengono, rispettivamente, le condizioni $\delta = \alpha$ e $\gamma = \alpha$. La famiglia richiesta è dunque

$$\mathcal{F} : \alpha(x^2 + y^2 - x - y) + \beta xy = 0$$

che risulta un fascio di coniche. La generica conica di $\mathcal{F}$ è

$$C_{\alpha, \beta} : 2\alpha(x^2 + y^2 - x - y) + 2\beta xy = 0$$

e la sua matrice associata è

$$B_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & \beta \\ -\alpha & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

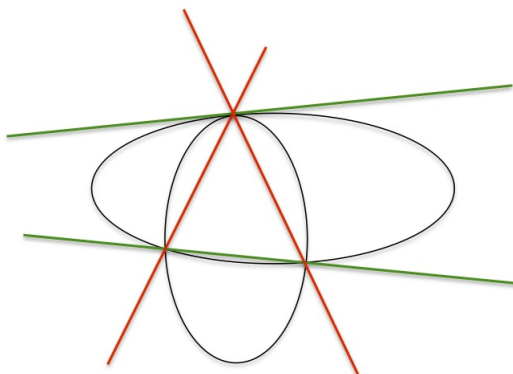
Essendo $\det(B_{\alpha, \beta}) = -2\alpha^2(2\alpha - \beta)$, si deduce che $\mathcal{F}$ contiene esattamente 3 coniche degeneri (dunque è un fascio non degenere) ottenute per $\alpha^2 = 0$ e per $\beta = 2\alpha$. Esse sono $xy = 0$ (contata 2 volte), cioè $r_{13} \cup r_{23}$, e la conica

$$x^2 + y^2 - x - y + 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + y)(x + y - 1) = 0$$

che risulta essere $t \cup r_{12}$. Infine, i punti base di $\mathcal{F}$ si ottengono intersecando, ad esempio, le due coniche degeneri:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ (x + y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 = y(y - 1) \\ y = 0 = x(x - 1) \end{cases}$$

ottenendo $(0, 0)^2, (0, 1), (1, 0)$. □



Proposizione 4.12.4. *Siano P_1 e P_2 due punti distinti e s e t due rette distinte tali che $P_1 \in s$, $P_1 \notin t$, $P_2 \in t$, $P_2 \notin s$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle coniche tangenti a s in P_1 e a t in P_2 . Allora $\mathcal{F}$ è un fascio non degenere, le sue 3 coniche degeneri sono r_{12}^2 (contata due volte) e $s \cup t$ e i suoi punti base sono P_1^2, P_2^2 .*

Dimostrazione. Come prima, si possono scegliere (nel piano euclideo) i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e le rette $s: x = 0$, $t: x - 1 = 0$.

La generica conica tangente a s in P_1 ha equazione

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x = 0.$$

Imponendo la tangenza a t in P_2 si ottengono le ulteriori condizioni $\delta = \alpha$ e $\beta = 0$. La famiglia richiesta è dunque

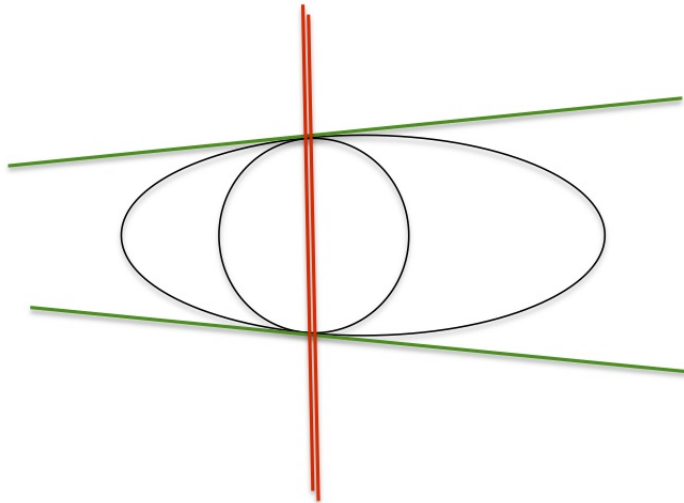
$$\mathcal{F}: \alpha(x^2 - x) + \gamma y^2 = 0.$$

che è chiaramente un fascio di coniche. I generatori sono coniche degeneri e precisamente $x(x - 1) = 0$ è l'equazione di $s \cup t$, mentre $y^2 = 0$ è la conica doppiamente degenere r_{12}^2 . Per verificare che quest'ultima è contata due volte, basta calcolare il determinante della matrice della generica conica $C_{\alpha, \gamma}$ del fascio $\mathcal{F}$, come nella Proposizione precedente.

Analogamente, per il calcolo dei punti base si possono intersecare le due coniche degeneri ottenendo

$$\begin{cases} x(x-1) &= 0 \\ y^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)^2, (1,0)^2$$

come volevamo. □



Proposizione 4.12.5. *Siano C una conica non degenera, P_1 e P_2 due punti distinti di C e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1 . Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 , passanti per P_2 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 3$. Allora:*

- i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenera;*
- ii) l'unica conica degenera di $\mathcal{F}$ è $r_{12} \cup t$ (contata 3 volte);*
- iii) i punti base di $\mathcal{F}$ sono P_1^3 e P_2 ;*
- iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha $m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 3$.*

Dimostrazione.

i)–ii) Si possono scegliere, come al solito, $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ e $t: x = 0$. Si osservi anzitutto che le 3 condizioni (tangenza a t in P_1 e passaggio per P_2) determinano un sistema lineare di coniche di dimensione 2. Si vede facilmente che il suo elemento generale è del tipo

$$\Gamma: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x = 0.$$

Una di esse è la conica C , la cui equazione si ottiene scegliendo opportuni valori dei parametri:

$$C: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax = 0.$$

Si verifica facilmente che C è non degenera se e solo se $ac \neq 0$.

Ora imponiamo che Γ sia osculante C in P_1 : posti $C \cap \Gamma = \{P_1^2, P_2, Q\}$, imponiamo cioè che Q coincida con P_1 . Ponendo a sistema le equazioni di C e Γ , questo è equivalente al sistema tra l'equazione di C e

$$\gamma(ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax) - c(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - \alpha x) = 0$$

da cui

$$x[(\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c)] = 0.$$

Si ottengono dunque due sistemi: dal primo si ha $C \cap \{x = 0\}$ e quindi P_1^2 . Il secondo fornisce le due intersezioni fra C e la retta

$$r: (\gamma a - \alpha c)x + 2(\gamma b - \beta c)y - (\gamma a - \alpha c) = 0$$

cioè il punto $P_2 = (1, 0)$ e l'ulteriore punto Q . È evidente che $Q = P_1$ se e solo se $P_1 \in r$ se e solo se $\gamma a - \alpha c = 0$. Imponendo tale condizione a Γ si ottiene dunque un'equazione per la famiglia $\mathcal{F}$ che risulta essere

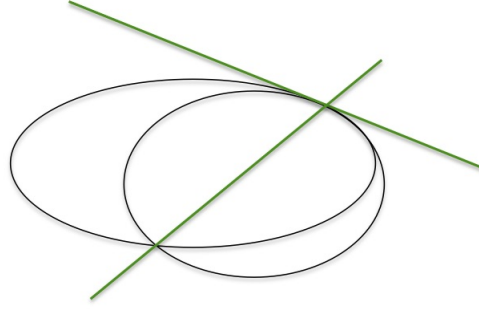
$$\mathcal{F}: \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha(c/a)y^2 - \alpha x = 0$$

o anche, denotando con h il coefficiente numerico c/a ,

$$\mathcal{F}: \quad \alpha(x^2 + hy^2 - x) + 2\beta xy = 0.$$

Quindi $\mathcal{F}$ è un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$, il suo determinante risulta $-h\alpha^3/2$, che risulta nullo se e solo se $\alpha = 0$. Infatti $h = c/a \neq 0$ in quanto C è non degenera per ipotesi. Pertanto l'unica conica degenera di $\mathcal{F}$ è $xy = 0$ contata 3 volte.

Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio. $\square$



Proposizione 4.12.6. *Siano C una conica non degenera, $P_1 \in C$ e $t := T_{P_1}(C)$ la retta tangente a C in P_1 . Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di coniche Γ tangenti a t in P_1 e tali che $m_{P_1}(\Gamma, C) = 4$. Allora:*

- i) $\mathcal{F}$ è un fascio non degenera;
- ii) l'unica conica degenera di $\mathcal{F}$ è t^2 (contata 3 volte);
- iii) $\mathcal{F}$ ha P_1^4 come unico punto base;
- iv) comunque scelte due coniche $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{F}$, si ha

$$m_{P_1}(\Gamma_1, \Gamma_2) = 4.$$

Dimostrazione.

i) – ii) Per il Teorema 4.9.9 (Classificazione delle coniche proiettive complesse), la conica C è proiettivamente equivalente a $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$, che può essere ricondotta, nel piano affine, alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Con una opportuna rototraslazione possiamo dunque supporre che

$$C : x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad P_1 = (0, 0).$$

Dunque $t : x = 0$. Imponendo le due condizioni lineari di tangenza a t in P_1 alle coniche del piano si ottiene la famiglia

$$\Gamma : \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x = 0.$$

Consideriamo $\Gamma \cap C$:

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x &= 0 \\ y^2 &= -x^2 + 2x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y^2 &= -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x^2 + 2\beta xy + (\delta + 2\gamma)x &= 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$(I) : \begin{cases} y^2 &= -x^2 + 2x \\ x &= 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)^2$$

$$(II) : \begin{cases} y^2 &= -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x + 2\beta y + \delta + 2\gamma &= 0 \end{cases}$$

Affinché $(x, y) = (0, 0)$ sia soluzione, deve essere $\delta + 2\gamma = 0$. Supponiamo $\beta \neq 0$; allora il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y^2 &= -x^2 + 2x \\ y &= (\gamma - \alpha)x/2\beta \end{cases}$$

da cui

$$(\gamma - \alpha)^2 x^2 = -4\beta^2 x^2 + 8\beta^2 x.$$

Tale equazione ha $x = 0$ come radice doppia se $\beta = 0$. Dunque, sostituendo nel sistema (II), si ha

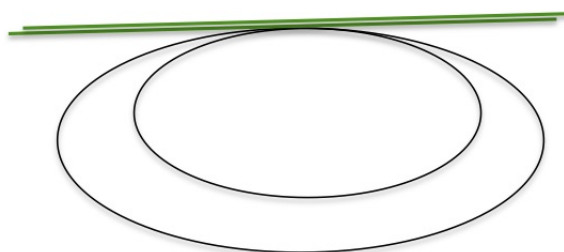
$$(II) : \begin{cases} y^2 &= -x^2 + 2x \\ (\alpha - \gamma)x &= 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0)^2.$$

Sostituendo le condizioni trovate ($\delta + 2\gamma = 0$ e $\beta = 0$) nell'equazione di Γ , si determina infine la famiglia richiesta

$$\mathcal{F} : \alpha x^2 + \gamma y^2 - 2\gamma x = 0$$

che risulta chiaramente un fascio. Considerando la matrice della generica conica di $\mathcal{F}$, il suo determinante risulta γ^3 , che è nullo se e solo se $\gamma = 0$. Pertanto l'unica conica degenera di $\mathcal{F}$ è $x^2 = 0$ (contata 3 volte).

Le affermazioni successive sono lasciate per esercizio. $\square$



Teorema 4.12.7 (Classificazione dei fasci non degeneri di coniche).

Sia $\mathcal{F}$ un fascio non degeneri di coniche di punti base P_1, P_2, P_3, P_4 .

Allora $\mathcal{F}$ è di uno dei seguenti tipi:

- i) fascio generale di coniche se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti e in posizione generale;*
- ii) fascio tangente di coniche se $P_1 = P_2, P_3, P_4$ sono distinti e non allineati; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno la stessa tangente in P_1 ;*
- iii) fascio bitangente di coniche se $P_1 = P_2$ e $P_3 = P_4$ sono distinti; in tal caso le coniche di $\mathcal{F}$ hanno le stesse rette tangenti in P_1 e in P_3 ;*
- iv) fascio osculante di coniche se $P_1 = P_2 = P_3$ e P_4 sono distinti; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 3 in P_1 ;*
- v) fascio iperosculante di coniche se $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$; in tal caso due coniche di $\mathcal{F}$ hanno molteplicità di intersezione 4 in P_1 .*

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 4.12.2, 4.12.3, 4.12.4, 4.12.5, 4.12.6 segue la descrizione dei tipi di fasci (i), ..., (v). Resta da provare che ogni fascio non degeneri $\mathcal{F}$ è di uno di questi tipi. Per la Proposizione 4.11.6, $\mathcal{F}$ contiene necessariamente una conica non degeneri e una degeneri, che indichiamo, rispettivamente, con C e D . Esaminiamo tutte le possibilità.

1. $D = r \cup s$, con $r \neq s$. Posto $Q := r \cap s$,

1.1. $Q \notin C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:

- r e s sono secanti C ;
- r è secante e s è tangente a C .
- r e s sono tangenti a C ;

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 1, 2, 3 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio generale, tangente o bitangente.

1.2. $Q \in C$. La posizione reciproca di C e delle componenti di D può essere:

- r e s sono secanti C ;
- r è secante e s è tangente a C .

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 4 e 5 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio tangente o osculante.

2. $D = r^2$. La posizione reciproca di C e di r può essere:

- r è secante C ;
- r è tangente a C .

Tali possibilità sono illustrate dalle Figure 6 e 7 e implicano, rispettivamente, che $\mathcal{F}$ è un fascio bitangente o iperosculante. $\square$

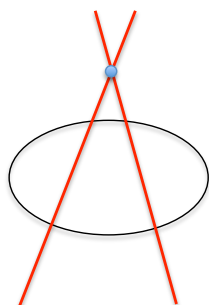


Figura 1

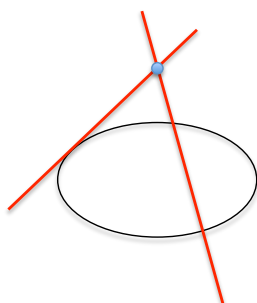


Figura 2

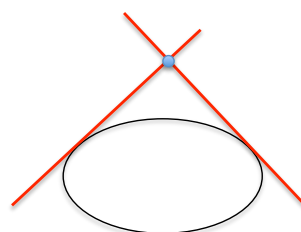


Figura 3

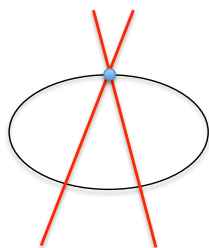


Figura 4

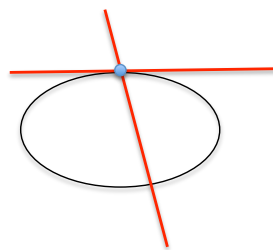


Figura 5

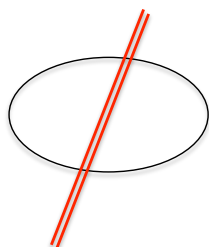


Figura 6

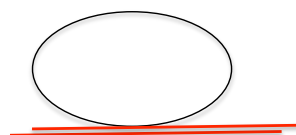


Figura 7

Esempio 4.12.1. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4 , specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (2, 2).$$

Per vedere se i 4 punti sono in posizione generale, occorre considerare le loro coordinate omogenee attraverso l'immersione $j_0 : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ e quindi

$$P_1 = [1, 1, 0], \quad P_2 = [1, 0, 0], \quad P_3 = [1, 0, 1], \quad P_4 = [1, 2, 2].$$

Tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questo accade, come si verifica facilmente. Dunque $\mathcal{F}$ è un fascio generale di coniche. In particolare, è un fascio non degeneri e contiene esattamente 3 coniche degeneri distinte. Possiamo sceglierne 2 come generatori; ad esempio

$$C := r_{12} \cup r_{34}, \quad D := r_{13} \cup r_{24}.$$

Si calcolano immediatamente:

$$C : y(x - 2y + 2) = 0, \quad D : (x + y - 1)(x - y) = 0$$

dunque

$$\mathcal{F} : \lambda y(x - 2y + 2) + \mu(x + y - 1)(x - y) = 0.$$

Esempio 4.12.2. Determinare l'equazione in $\mathbb{A}^2$ della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche osculanti C in P_1 e passanti per P_2 , specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (-1, 0)$ e

$$C : 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

Poiché $P_2 \in C$ (e C è osculante se stessa in ogni punto), allora $C \in \mathcal{F}$. Questo risulta quindi un fascio osculante di coniche generato, ad esempio, da C e dalla conica degeneri $D := r_{12} \cup t$, dove $t = T_{P_1}(C)$.

Posto $f(x, y)$ il polinomio che definisce C , si calcola

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_1} = 8x + 8 \Big|_{P_1} = 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_1} = 2y - 4 \Big|_{P_1} = 0,$$

quindi $t : x = 0$.

D'altra parte $r_{12} : 2x - y + 2 = 0$ e dunque $D : x(2x - y + 2) = 0$, da cui

$$\mathcal{F} : \lambda(4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4) + \mu x(2x - y + 2) = 0.$$

Per descrivere i fasci degeneri di coniche, iniziamo con due semplici fatti.

Osservazione 4.12.1. Se un fascio $\mathcal{F}$ ha, tra i suoi punti base, 3 punti distinti allineati, allora è un fascio degenerare. Infatti, supponiamo che $C \in \mathcal{F}$ sia una conica non degenerare e sia r la retta contenente 3 punti base distinti P_1, P_2, P_3 . Allora $(C \cap r) \supseteq \{P_1, P_2, P_3\}$, ma questo è impossibile per la Proposizione 4.9.10. Dunque non esiste una conica non degenerare in $\mathcal{F}$.

Osservazione 4.12.2. Non è sufficiente che i generatori di $\mathcal{F}$ siano due coniche degeneri affinché $\mathcal{F}$ sia un fascio degenerare. Ad esempio, un fascio generale di coniche ha 3 coniche degeneri distinte, dunque si possono scegliere 2 di queste per generarlo. Tuttavia è una condizione necessaria. Vedremo che due coniche degeneri generano un fascio degenerare o non degenerare a seconda della posizione dei loro punti doppi.

Nel successivo Teorema, denotiamo con $\mathcal{G}_P$ il fascio di rette di sostegno P .

Teorema 4.12.8. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenerare di coniche generato da due coniche semplicemente degeneri*

$$C_1 := r_1 \cup s_1, \quad C_2 := r_2 \cup s_2$$

e siano

$$P_1 := r_1 \cap s_1, \quad P_2 := r_2 \cap s_2$$

i rispettivi punti doppi. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:

- i) C_1 e C_2 hanno una componente in comune, per esempio $r_1 = r_2$. In tal caso, $\Gamma \in \mathcal{F}$ se e solo se $\Gamma = r_1 \cup t$ dove $t \in \mathcal{G}_Q$ e $Q := s_1 \cap s_2$. Inoltre i punti base di $\mathcal{F}$ sono tutti e soli i punti di r_1 e il punto Q .
- ii) C_1 e C_2 non hanno componenti in comune e $P_1 = P_2$. In tal caso, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_{P_1}$. Inoltre $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P_1 , contato 4 volte.

Dimostrazione. Si presentano i seguenti casi:

(a) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \notin C_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 4 punti in posizione generale, pertanto $\mathcal{F}$ è un fascio generale di coniche; in particolare è non degenerare, contro l'ipotesi.

(b) $P_1 \notin C_2$ e $P_2 \in C_1$. In questo caso P_2 appartiene a una sola delle componenti di C_1 , ad esempio $P_2 \in r_1$. In questo caso C_1 e C_2 si intersecano in 3 punti non allineati dei quali P_2 è contato due volte, pertanto $\mathcal{F}$ è un fascio tangente di coniche, tutte aventi comune tangente r_1 nel punto P_2 (vedi Proposizione 4.12.3). In particolare $\mathcal{F}$ è non degenerare, contro l'ipotesi.

(c) $P_1 \in C_2$ e $P_2 \in C_1$, ma $P_1 \neq P_2$. In questo caso la retta per P_1 e P_2 è una componente comune di C_1 e C_2 (retta base). Pertanto $C_1 = r \cup s_1$ e $C_2 = r \cup s_2$. In un opportuno sistema di riferimento si ha dunque

$$C_1 : x(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \quad C_2 : x(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

e quindi

$$\mathcal{F}: \quad \lambda x(a_1x + b_1y + c_1) + \mu x(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Dunque la generica conica di $\mathcal{F}$ ha equazione

$$x [\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2)] = 0$$

e quindi è l'unione della retta base $x = 0$ e di una retta che varia nel fascio di rette generato da s_1 e s_2 , ovvero in $\mathcal{G}_Q$.

(d) $P_1 = P_2$. Consideriamo un sistema di riferimento in cui $P_1 = O = (0, 0)$, $r_1: x = 0$ e $r_2: y = 0$. Allora $\mathcal{F}$ ha equazione

$$\mathcal{F}: \quad \lambda x(a_1x + b_1y) + \mu y(a_2x + b_2y) = 0.$$

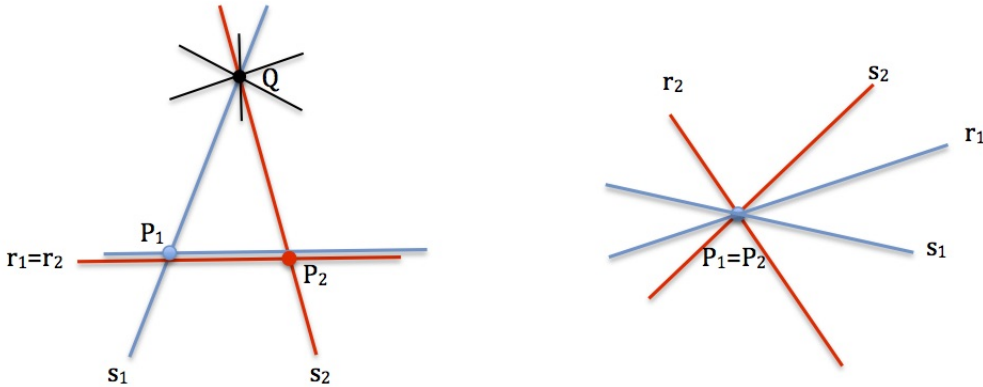
La sua generica conica è

$$C_{\lambda,\mu}: \lambda a_1x^2 + \lambda b_1xy + \mu a_2xy + \mu b_2y^2 = 0$$

la cui matrice associata è

$$B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_1 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 \\ 0 & (\lambda b_1 + \mu a_2)/2 & \mu b_2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $C_{\lambda,\mu}$ è degenere per ogni $[\lambda, \mu]$. Con un semplice calcolo, si verifica che $O = (0, 0)$ è punto doppio per ogni conica $C_{\lambda,\mu}$, dunque le sue componenti variano nel fascio di rette di centro O , come volevamo. $\square$



Esempio 4.12.3. Determinare l'equazione della famiglia $\mathcal{F}$ delle coniche di $\mathbb{A}^2$ per P_1, P_2, P_3, P_4 , specificando se $\mathcal{F}$ è un fascio e, in tal caso, di che tipo, dove

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (-2, 0).$$

Si procede come nell'Esempio 4.12.1, considerando la matrice le cui righe sono le coordinate omogenee dei 4 punti e osservando che tali punti sono in posizione generale se e solo se tutti i minori 3×3 della matrice M sono non degeneri, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, invece, il minore costituito dalle righe diverse dalla terza è degenero. Questo significa che i punti P_1, P_2, P_4 sono allineati: infatti appartengono tutti alla retta $r : y = 0$. Pertanto ogni conica C contenente tali punti deve contenere la retta r . Quindi $C = r \cup s$, dove s è una qualunque retta per P_3 . Le coniche richieste costituiscono dunque un fascio degenero avente r come retta base e P_3 come punto base.

A questo punto si scrive l'equazione del fascio di rette di sostegno P_3 :

$$\mathcal{F}_{P_3} : \quad \lambda x + \mu(y - 1) = 0$$

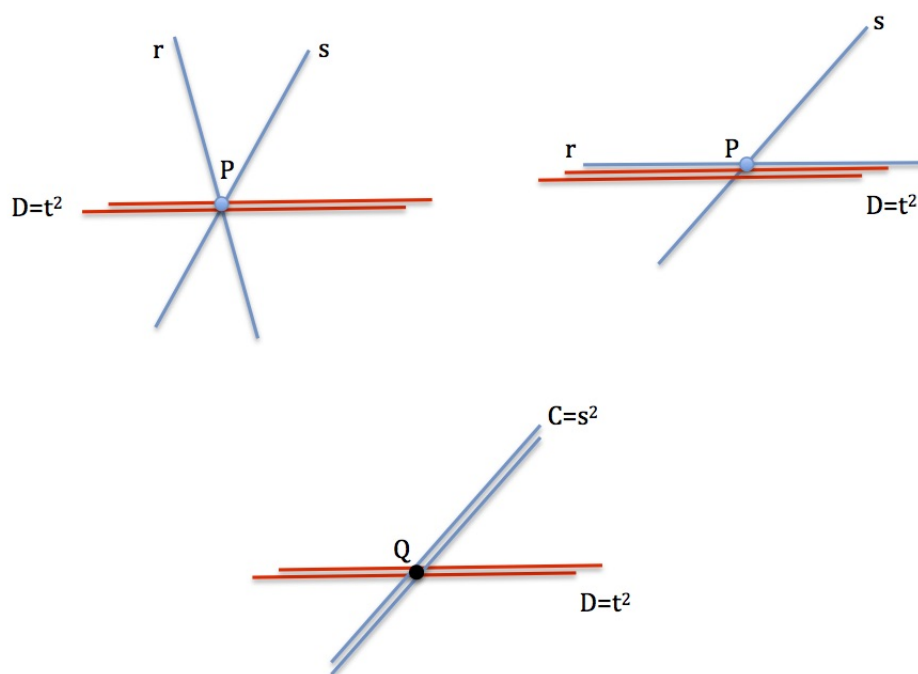
da cui il fascio di coniche richiesto ha equazione

$$y(\lambda x + \mu(y - 1)) = 0.$$

Teorema 4.12.9. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio degenero di coniche generato da due coniche degeneri C e D delle quali almeno $D = t^2$ è doppiamente degenero. Allora si ha uno e uno solo dei seguenti casi:*

- i) $C = r \cup s$ è semplicemente degenero e $P := r \cap s$. Allora $P \in D$.
Inoltre
 - se C e D non hanno componenti comuni allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_P$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base P , contato 4 volte.
 - se C e D hanno una componente comune, ad esempio $C = r \cup t$, allora ogni conica $\Gamma \in \mathcal{F}$ è unione di t e di una retta appartenente a $\mathcal{G}_P$. In particolare, $\mathcal{F}$ ha t come retta base.
- ii) Anche $C = r^2$ è doppiamente degenero. Allora, posto $Q := t \cap r$, se $\Gamma \in \mathcal{F}$ allora Γ è unione di due rette appartenenti a $\mathcal{G}_Q$ e $\mathcal{F}$ ha come unico punto base Q , contato 4 volte.

Dimostrazione. Per esercizio (analogo al precedente teorema). $\square$



Indice

1	GEOMETRIA AFFINE	1
1.1	Spazi affini	1
1.2	Sottospazi affini e loro intersezioni	6
1.3	Sottospazi paralleli e sghembi	11
1.4	Equazioni parametriche di sottospazi affini	13
1.5	Equazioni cartesiane di sottospazi affini	16
1.6	Calcolo della posizione reciproca di sottospazi	21
1.7	Fasci di rette e fasci di piani	26
1.8	Applicazioni affini e affinità	31
1.9	Gruppi di trasformazioni affini	34
1.10	Equazioni di affinità e cambi di riferimento	37
1.11	Proprietà affini	41
1.12	Spazi affini reali	45
2	GEOMETRIA EUCLIDEA	49
2.1	Spazi vettoriali euclidei	49
2.2	Spazi affini euclidei	54
2.3	Distanze negli spazi affini euclidei	57
2.4	Automorfismi di spazi vettoriali euclidei	63
2.5	Isometrie degli spazi euclidei	68
2.6	Classificazione delle isometrie del piano	71
3	GEOMETRIA PROIETTIVA	81
3.1	Spazi proiettivi	84
3.2	Equazioni cartesiane	89
3.3	Equazioni parametriche	93
3.4	Fasci di iperpiani	97
3.5	Completamento di $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$	100
3.6	Proiettività	109
4	CONICHE	117
4.1	Coniche nel piano euclideo	117
4.2	Forma canonica: traslazioni	125

4.3	Forma canonica: rotazioni	133
4.4	Classificazione delle coniche in $\mathbb{E}^2$	138
4.5	Studio di una conica in forma generale	145
4.6	Coniche nel piano affine	150
4.7	Punti singolari di una conica	156
4.8	Classificazione delle coniche affini	163
4.9	Coniche proiettive	169
4.10	Dualità e sistemi lineari	177
4.11	Fasce di coniche	182
4.12	Classificazione dei fasci di coniche	189

Ringraziamenti

Ringrazio il prof. Daniele Zuddas per i numerosi esercizi ed esempi che ha fornito e per l'accurata rilettura di queste Note.